

解答例 令和7年

1. $v = \alpha u + \beta w$ を解く. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ より.

拡大係数行列を考えれば,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 2 & 2 & -3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -\frac{5}{3} \\ 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 2 & -\frac{17}{3} \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -9 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -9 \end{array} \right]$$

よ) 解なし $\therefore v \notin \langle u, w \rangle$ である.

2. $\text{rank}[v_1 \ v_2 \ v_3] = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} = 3. \quad \therefore v_1, v_2, v_3 \text{ は 1 次独立.}$$

$\dim \mathbb{C}^3 = 3$ なので v_1, v_2, v_3 は基底である.

3. $[v_1 \ v_2 \ v_3] = [u_1 \ u_2 \ u_3]P$ となる P を求める.

$[u_1 \ u_2 \ u_3]$ の逆行列を求めると.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 1 - 10 = -15 \text{ であるので、余因子行列を使えば!}$$

$$[u_1, u_2, u_3]^{-1} = \frac{1}{-15} \begin{bmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 9 & -6 \end{bmatrix} \text{ となる}$$

$$\therefore P = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -12 & 18 \end{bmatrix} \text{ である}$$

$$4. \text{例えば } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ など}$$

$$5. \frac{d}{dx} 1 = 0 = [1 \ x \ x^2] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dx} x = 1 = [1 \ x \ x^2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x = [1 \ x \ x^2] \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{求める表現行列は} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ である.}$$

$$\begin{aligned}
 6(1) \quad \varphi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-3 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -2 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)((t-2)(t-3)-2) \\
 &= (t-1)(t^2-5t+4) = (t-1)^2(t-4)
 \end{aligned}$$

ここで固有値 1 について $(E-A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解く.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \text{ であり,}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

よ) 解の自由度は 1. $x=t$ とすれば $z=-2t, y=0$ より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \therefore V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ より } \dim V(1) = 1.$$

重複度と固有空間の次元が一致しないので、対角化可能でない

$$(2) \varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t & 2 & -2 \\ -1 & t+3 & -1 \\ -2 & 2 & t \end{vmatrix} = t^2(t+3) + 4 + 4 - 4(t+3) + 2t + 2t$$

$$= t^3 + 3t^2 - 4 = (t-1)(t^2 + 4t + 4) = (t-1)(t+2)^2$$

$\therefore$ 固有値は 1 と -2. 重複度はそれぞれ 1 と 2.

固有値 -2 について. 固有ベクトルを求める

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \text{ を解くと,}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{より}$$

解の自由度は 2. $x=t, y=s$ と可成は $z = -t + s$ で

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t+s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{より } V(-2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

となる. $\therefore \dim V(-2) = 2$ である.

固有値 1 について.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \text{ を解くと,}$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

∴ 解の自由度は 1. $y = t$ とすれば $z = 2t, x = 2t$ より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \therefore V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle, \dim V(1) = 1.$$

∴ 重複度と固有空間の次元が一致し、対角化可能.

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{とすれば}$$

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} -2 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{となる.}$$