解答例.

1. $\mathrm{rank}[v_1\ v_2\ v_3] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$ $\therefore$ 1次従属である.

2. $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

とする. 拡大係数行列を使うと

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 3 \\ & 1 & & -\frac{3}{2} \\ & & 1 & -\frac{7}{2} \end{array}\right].$$

$\therefore\ x = [v_1\ v_2\ v_3]\begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$ となる.

3. $[v_1\ v_2\ v_3] = [u_1\ u_2\ u_3]P$ をみたす行列 P を求めればよい.

$[u_1\ u_2\ u_3]$ の逆行列は.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 3 & 1 & & 1 & \\ 1 & 5 & -1 & & & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 0 & 3 & 1 & & 1 & \\ 0 & \frac{9}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & 1 & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & \\ & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\ & 1 & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & \\ & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\ & 1 & & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} \\ & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & \frac{8}{15} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{15} \\ & 1 & & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} \\ & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$ となる

$$\therefore P = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 9 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -12 & 18 \end{bmatrix}$$ である

4. $y_1 = \frac{1}{3}u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

$$\tilde{y}_2 = u_2 - (y_1, u_2)y_1 = u_2 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \frac{1}{\|\tilde{y}_2\|}\tilde{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{y}_3 = u_3 - (y_1, u_3)y_1 - (y_2, u_3)y_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$y_3 = \frac{1}{\|\tilde{y}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ この y_1, y_2, y_3 が求める正規直交基底である

5 例えば $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ や $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ など.

6. A はエルミートなので対角化可能.

$$\varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -4 \\ 0 & t-1 & -4 \\ 3 & -3 & t+1 \end{vmatrix} = (t-2)\cdot(t-1)\cdot(t+1)$$
$$-12 + 12(t-1) - 12(t-2)$$

$$= (t-2)(t-1)(t+1)$$

∴ 異なる3つの固有値をもつので対角化可能.

∴ 対角化可能でないのは C.

7. (1) $\varphi_D(t) = \begin{vmatrix} t & 2 & -2 \\ -1 & t+3 & -1 \\ -2 & 2 & t \end{vmatrix} = t^2(t+3) + 4 + 4 - 4(t+3) + 4t$

$= t^3 + 3t^2 - 4.$

$= (t-1)(t^2+4t+4) = (t-1)(t+2)^2.$

$\therefore$ 固有値は 1 と -2.

$V(1)$ について.

$(E-D)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解くと.

$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$ より

解の自由度は 1. $y = t$ とすれば $z = 2t$, $x = 2t$

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \therefore V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle.$

$V(-2)$ について.

$(-2E+D)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解くと.

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

$\therefore$ 解の自由度は2. $x=t, y=s$ とすれば $z=-t+s$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t+s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore V(-2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(2) $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ となる.