## 解答例

1. $\begin{bmatrix}1\\4\\-3\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 0\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ を解くと.

$$\left[\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 1\\3 & 0 & 4\\2 & 2 & -3\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c}2 & -1 & 1\\1 & 0 & \frac{4}{3}\\0 & 3 & -4\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{4}{3}\\0 & 1 & -\frac{4}{3}\\2 & -1 & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{4}{3}\\0 & 1 & -\frac{4}{3}\\0 & 0 & -3\end{array}\right]$$

より解なし. $\therefore$ $v \notin \langle u, w\rangle$ である

2. $\mathrm{rank}[v_1\ v_2\ v_3] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\3 & -2 & 0\\1 & 2 & -1\end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -5 & -3\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}$

$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & -13\end{bmatrix} = 3$ $\therefore$ $v_1, v_2, v_3$ は1次独立.

$\dim \mathbb{C}^3 = 3$ なので. $v_1, v_2, v_3$ は基底である.

3. $[v_1\ v_2\ v_3] = [u_1\ u_2\ u_3]P$ となる $P$ を求める.

$[u_1\ u_2\ u_3]^{-1}$ を求めると

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 1 & & \\0 & 3 & 1 & & 1 & \\1 & 5 & -1 & & & 1\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\0 & 3 & 1 & & 1 & \\0 & \frac{9}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1\end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & \\ 0 & \frac{9}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\ & 1 & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & \\ & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\ & 1 & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & \\ & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\ & 1 & & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} \\ & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & \frac{8}{15} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{15} \\ & 1 & & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} \\ & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right].$$

$$\therefore P = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 9 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -12 & 18 \end{bmatrix}$$ である。

4. $f(v_1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ とすると $\begin{cases} a = 5 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$

$f(v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ とすると $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}$

∴ 求める表現行列は $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}$.

5. Aはエルミートなので対角化可能

$$\varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 2 & 0 \\ -1 & t+3 & -1 \\ 0 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t+3) + 2(t-2) + 2(t-2)$$

$$= (t-2)(t^2+t-6+4) =$$

$= (t-2)(t+2)(t-1)$. ∴ $B$の固有値は $2, -2, 1$ で

異なる3つの固有値をもつので対角化可能

∴ 対角化可能でないのは $C$.

6 (1) $\varphi_D(t) = \begin{vmatrix} t+3 & 0 & 0 \\ -4 & t-5 & 4 \\ -2 & -4 & t+5 \end{vmatrix} = (t+3)\left((t-5)(t+5)-16\right)$

$= (t+3)^2 \cdot (t-3)$.

∴ 固有値は $3$ と $-3$.

(2) 固有値3について,

$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解くと.

$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$

$z = t$ とすると. $x = 0$, $y = 2t$ より

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ∴ $V(3) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

固有値 $-3$ について.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ を解くと.

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$ より.

$x = t$, $y = s$ とすれば. $z = t + 2s$.

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ t+2s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \therefore V(-3) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

(3) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とすれば $P^{-1}DP = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & -3 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$ となる