解答例

1. $\operatorname{rank}[v_1\ v_2\ v_3] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$ $\quad \therefore$ 1次独立でない.

2. $y_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{u_1}{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$y_2' = u_2 - \langle y_1, u_2 \rangle y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

$y_2 = \dfrac{y_2'}{\|y_2'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

$y_3' = u_3 - \langle y_1, u_3 \rangle y_1 - \langle y_2, u_3 \rangle y_2$

$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$y_3 = \dfrac{y_3'}{\|y_3'\|} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ となる

3. $f(v_1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

とすると. $a = 5$, $b = \frac{1}{2}$ より

$= [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$f(v_2) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

とすると $a = 1$, $b = 5$ より

$= [u_1, u_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

∴求める表現行列は $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}$

4. C はエルミートなので対角化可能.

$\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ -1 & t & -1 \\ 0 & -2 & t \end{vmatrix} = t^2(t-1) + 2 - 2t - 2(t-1)$

$= t^2(t-1) - 4(t-1) = (t-1)(t^2-4)$

$= (t-1)(t-2)(t+2)$

∴ 固有値は 1, 2, −2. 異なる3つの固有値をもつので,

A は対角化可能　∴ 答えは B.

(別解)

$$\varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & 0 \\ -2 & t-2 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)\left((t-2)(t-3)-2\right)$$

$$= (t-1)(t^2-5t+4) = (t-1)^2(t-4).$$

∴ 固有値は 1 と 4. ここで

$$\mathrm{rank}(E-B) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

∴ $\dim V(1) = 3-2 = 1$. で重複度と一致しない.

∴ 答えは B.

5. $$\varphi_D(t) = \begin{vmatrix} t & 2 & -2 \\ -1 & t+3 & -1 \\ -2 & 2 & t \end{vmatrix} = t^2(t+3) + 4 + 4 + 2t + 2t - 4(t+3)$$

$= t^3+3t^2-4 = (t-1)(t^2+4t+4) = (t-1)(t+2)^2$

∴固有値は 1と −2.

(2). 固有値1の固有ベクトルは.

$(E-D)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$. これを解くと

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より

$y = t$ として $z = 2t$, $x = 2t$.

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ である.

固有値−2の固有ベクトルは.

$(-2E-D)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

これをとくと

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より. $x=t$, $y=s$ とおく.

$z=-t+s$. である.

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t+s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$V(-2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$ となる.

(3) $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば $P^{-1}DP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

である.