§3 推定と検定

§3.1. 標本分布

統計の対象となる集まりを母集団 その1つ1つを個体

母集団が従う分布を母集団分布，平均や分散などを母数という.

↳ どう調べるか?

その1 全部調べる ← 授業では扱わない.

その2 一部を調べて.全体を推測する.

↳ これを標本調査という.

ぬき出した個体を標本，その数を標本の大きさという.

注 ぬき出すときは.くじをひくように選ぶ (選んだらもどす)

これを無作為抽出といい.その標本を無作為標本という.

標本と確率変数

標本は数値化されているとして.その値を

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする. これらは独立な確率変数になる

また．実際に調査してえられるデータ $x_1,\cdots,x_n$ を実現値という．

統計量．標本調査では．主に母平均 μ や母分散 σ^2 を推測

することが目的になる．これに．　$E(X_i)=\mu$,　$V(X_i)=\sigma^2$

標本平均　$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

標本分散　$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

標本標準偏差　$S=\sqrt{S^2}$　を用いる．

このように．標本から定義される確率変数を統計量という．

定理1．$E(\overline{X})=\mu$,　$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$．

∵ $E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu$．

$V(\overline{X})=V\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum V(X_i)=\frac{1}{n}\sigma^2$　//

例題1 → 問1

定理2. $^\forall \varepsilon > 0$ に対し.

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}-\mu| < \varepsilon) = 1 \quad \text{となる}$$

∵ 第1章定理17より //

$U^2 = \frac{n}{n-1} S^2$ を不偏分散という.

定理3. $E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$, $E(U^2) = \sigma^2$.

∵ $E(X_i^2) = V(X_i) + E(X_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2$

$E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + E(\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)$

$= \frac{1}{n}\sum X_i^2 - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 - \bar{X}^2$.

$\therefore E(S^2) = \frac{1}{n}\sum E(X_i^2) - E(\bar{X}^2)$

$= \sigma^2 + \mu^2 - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ //

$\mu \longleftarrow \bar{X}$ から推測 ← 不偏推定量

$\sigma^2 \longleftarrow S^2$ から推測

U^2

推定量