ラプラスの定理

X が $B(n,p)$ に従うとすると. 定理8より

$E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$ であるので, この標準化は

$$Z_n = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$ である.

定理11.

Z_n は $n\to\infty$ とすると $N(0,1)$ に収束する.

これを使うと. $B(n,p)$ の近似ができる.

nが十分に大きいとし, ($n\geq 50$, $np\geq 5$ くらい)

Z は $N(0,1)$ に従うとする. このとき $a, b\in\mathbb{N}$ に対し.

$$P(a\leq X\leq b) = P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \underbrace{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{Z_n} \leq \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\fallingdotseq P\left(\frac{a-0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{b+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

近似.　0.5は補正項　とできる. 例14. 問19.

同時確率分布

X, Y が離散型で、とりうる値がそれぞれ

$x_i, y_j \ (i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n)$ とする。このとき

$$p_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j)$$

を X と Y の同時確率 (x_i, y_j) と p_{ij} の対応関係を同時確率分布という。

また
$$p_{i\cdot} = P(X=x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$$
$$p_{\cdot j} = P(Y=y_j) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$$
を周辺確率という。

このとき同時確率分布表は

$Y \backslash X$	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_m	Yの周辺確率
y_1	p_{11}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	p_{m1}	$p_{\cdot 1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{mj}	$p_{\cdot j}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_n	p_{1n}	$\cdots$	p_{in}	$\cdots$	p_{mn}	$p_{\cdot m}$
Xの周辺確率	$p_{1\cdot}$		$p_{i\cdot}$		$p_{m\cdot}$	

である。

これらは

$$0 \leq p_{ij} \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$ などをみたす。

また、確率変数 $\varphi(X, Y)$ に対し ($\varphi(x, y)$ は2変数関数)

$$E(\varphi(X, Y)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_i, y_j) \cdot p_{ij}$$

で期待値を定める。

定理12. X, Y を確率変数とすると、$a, b, c \in \mathbb{R}$ に対し

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

が成立。

定義. X, Y に対し

$$\gamma(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$ を 共分散

$$\rho(X, Y) = \frac{\gamma(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$ を 相関係数 という。

定理13. X, Yは確率変数, $a, b \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $V(aX+bY) = a^2V(X) + 2ab\,\gamma(X,Y) + b^2V(Y)$

(2) $\gamma(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

(3) $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

∵ (1) $V(aX+bY) = E((aX+bY-E(aX+bY))^2)$

$= E((a(X-E(X)) + b(Y-E(Y)))^2)$

$= E(a^2(X-E(X))^2 + 2ab(X-E(X))(Y-E(Y)) + b^2(Y-E(Y))^2)$

$= a^2V(X) + 2ab\,\gamma(X,Y) + b^2V(Y)$

(2) $\gamma(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y)))$

$= E(XY - XE(Y) - E(X)\cdot Y + E(X)E(Y))$

$= E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$

$= E(XY) - E(X)E(Y)$

(3) は A.2 参照　例15, 問20