期待値と分散

<u>定義</u> 確率変数 X に対し

離散 : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

連続 : $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$

を X の期待値という

関数 $\varphi(x)$ に対し $\varphi(X)$ も確率変数となる

例えばサイコロの場合

X	1	2	3	4	5	6
X^2	1	4	9	16	25	36
$X+2$	3	4	5	6	7	8
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$\varphi(x) = x^2$

$\varphi(x) = x+2$

このとき $\varphi(X)$ の期待値を

$$E(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i$$

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p(x) dx$$ とする

定理6　$a_i, a, b \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $E(aX+b) = aE(X) + b$

(2) $E(a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n)$

$= a_0E(X^n) + a_1E(X^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}E(X) + a_n$.

∵ (1)の連続型のみ示す．

$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)\, p(x)\, dx$

$= a\int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\, dx + b\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx$

$= aE(X) + b$.　//.

例題7を解説

問12を解く．

<u>定義</u> 確率変数 X に対し

$V(X) = E((X-E(X))^2)$ を 分散

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ を 標準偏差 という.

<u>定理 7</u>.

(1) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

(2) $V(aX+b) = a^2 V(X)$

$\sigma(aX+b) = |a| \cdot V(X)$

$\because$ (1) $V(X) = E((X-E(X))^2)$

$= E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2)$

$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2$.

$= E(X^2) - E(X)^2$.

(2) $V(aX+b) = E((aX+b-E(aX+b))^2)$

$= E((aX-aE(X))^2) =$

$$= a^2E((X-E(X))^2) = a^2V(X)$$ //

$$Z = \frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$$ とすると.

$E(Z)=0$, $V(Z)=1$ となる.

これを確率変数の標準化という.

例題8を解説.

問13を解く.