ベイズの定理

定理4. $A_1, \cdots, A_n$ は排反で. $B \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$ とすると.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)$$ をみたす.

∵ $B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$ と排反な分割ができるので.

定理2

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum P(A_i) P(B \mid A_i)$$ //

定理5 $A_1, \cdots, A_n$ は排反で $B \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$ とする

このとき $1 \leq {}^\forall k \leq n$ に対し.

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k) P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)}$$

∵ $P(A_k \cap B) = P(B) P(A_k \mid B)$ (∵定理2)

$$= P(A_k) P(B \mid A_k)$$

定理4

$$\therefore P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k) P(B \mid A_k)}{P(B)} = \frac{P(A_k) P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)}$$ //

例題4の解説

問8.9をとく.

§1.2 確率分布

事象をなるべく数値化したい!

<u>定義</u>. 試行の結果, 値が定まる量 X を考える. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $(a<b)$ に対して. $P(\underbrace{X=a}_{\text{これを事象と捉えている}})$, $P(a \leq X \leq b)$, $P(X>a)$ が定まるとき, X を確率変数という.

<u>離散型</u>. さいころ投げで出る目の値を X とすると. X のとりうる値は $1, 2, \cdots, 6$ の6つである.

このようにとびとびの値をとる確率変数を離散型という.

X が離散型のとき. とりうる値を $x_1, \cdots, x_n$ とし. $(x_1 < \cdots < x_n)$

$P(X=x_i)=p_i$ とする. このとき,

$0 \leq p_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ をみたす.

また この対応を表にした.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

を確率分布表といい.

この対応関係を確率分布という.

さらに. $F(x) = P(X \leq x)$ をXの分布関数という.

分布関数は.

$$p_1 = F(x_1), \quad p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$ をみたす.

例題5を解説

問10をとく.

連続型

Xが連続的な値をとり、$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ に対し、

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)\,dx$$

をみたす関数 $p(x)$ が存在するとき、

Xを連続型, $p(x)$を確率密度関数という.

特に $P(X=a)=0$ なので、

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$$ である.

また、分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ は

$$\frac{d}{dx}F(x) = p(x)$$ をみたす.

例題 6 の解説

問 11 をとく.

- $p(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$ もみたす