t分布　Z と X は独立で、Z は $N(0,1)$ に、

X は χ_n^2 に従うとする。このとき

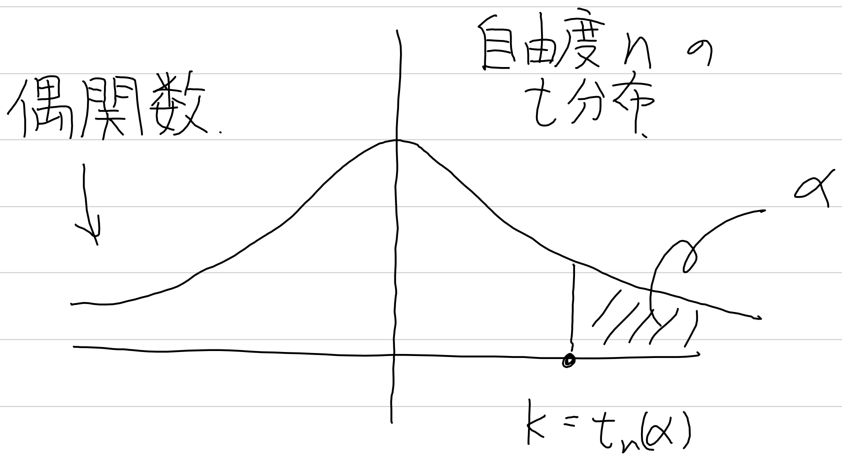
$T = \dfrac{Z}{\sqrt{X/n}}$　が従う分布を自由度 n の t分布 という。

密度関数は P64参照。$\underbrace{n \to \infty \text{ のとき}}$ 偶関数で $N(0,1)$ に近づく。

$^\forall \alpha$ $(0 < \alpha < 0.5)$ に対し、

$P(T \geq k) = \alpha$　となる k の近似値を表したのが

t分布表で、この k を $t_n(\alpha)$ とかき、t分布の α点 という。



例題9 → 問8

統計的推定

点推定

1つの値による推定

母平均 ⟵ 標本平均から推定 … ✡

母分散 ⟵ 不偏分散から推定

どのくらい正確かはあまり分からない

(✡のとき)
→ 正確さを表す数値として 標準誤差

$$SE = \sqrt{V(\bar{X})} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \fallingdotseq \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$ が用いられる

区間推定

例えば母平均 θ が

$$P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) = \underline{1-\alpha}$$ のように

この区間を信頼区間という　信頼度

区間 $[\theta_1, \theta_2]$ に入る確率が $1-\alpha$ と推定する方法を

区間推定という このとき $[\theta_1, \theta_2]$ を $1-\alpha$ 信頼区間という

母平均の区間推定

1. 母分散が既知

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からとり出した $X_1, \cdots, X_n$, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

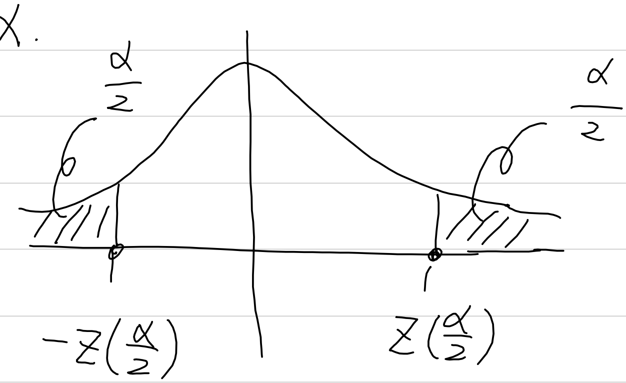
を考える.

$\overline{X}$ は $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ に従う(定理4).

∴ $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu)$ は $N(0,1)$ に従う.

∴ $P\left(-z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu) \leq z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$ ―☆

$= P\left(|Z| \leq z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha.$



一方

☆ $= \left(\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \overline{X} \leq \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

$= \left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$ となる

$\therefore \left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z\left(\frac{\alpha}{2}\right), \ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$ に μ が入る確率は

$1-\alpha$ となる. まとめると次をえる.

公式1. 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ で σ^2 が既知とする.

$\bar{X}$ の実現値を $\bar{x}$ とすると μ の $1-\alpha$ 信頼区間は

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$ である

例題11 → 問10