

標本分布

標本から定まる統計量が従う分布を **標本分布** という。

正規母集団

母集団分布が正規分布に従うとき、母集団を **正規母集団** という。

このとき、標本の1つ1つ、また標本平均も正規分布に従う。

定理4 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からとり出した大きさ n の

標本 X_1, \dots, X_n の平均 \bar{X} は $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ に従う。

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X} - \mu) \text{ は } N(0, 1) \text{ に従う。}$$

例題3 → 問3 (省略)

定理5 平均 μ 、分散 σ^2 の母集団から抽出した

X_1, \dots, X_n の平均 \bar{X} は、 n が十分大きいとき、^(ほぼ) $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ に従う。

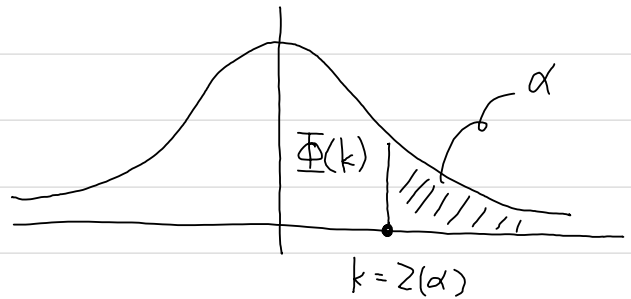
③ $n > 30$ のとき大標本といい、定理5を使ってよい。

例題4 → 問4 (省略)

Z が $N(0,1)$ に従うとき.

$$P(Z \geq k) = \alpha \quad (0 < \alpha < 0.5)$$

$$= 0.5 - \Phi(k)$$



をみたす k の値を $Z(\alpha)$ とかき. 標準正規分布の α 点 という

例題 5

二項母集団

Yes or No で分類できる母集団を **二項母集団** という.

Yes (クラス C) の割合を **母比率** という.
 $\rightarrow p$ とする.

標本 X_1, \dots, X_n は Yes $\rightarrow 1$, No $\rightarrow 0$ とすると.

$B(1, p)$ に従う. $\therefore N = \sum_{i=1}^n X_i$ は $B(n, p)$ に従う.
 \uparrow Yes の数.

$P = \frac{N}{n}$ を **標本比率** という

$E(X_i) = p, V(X_i) = p(1-p)$ より次をえる

定理6. N が十分に大きければ.

$$Z = \frac{N - np}{\sqrt{npq}} = \frac{P - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad \text{は } N(0,1) \text{ に従う}$$

☹ $E(N) = np, V(N) = np(1-p)$

↳ $E(p) = p, V(p) = \frac{p(1-p)}{n}$ と中心極限定理より

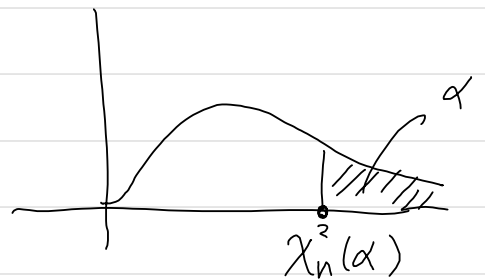
例題6 → 問5 (省略).

χ^2 分布 Z_1, \dots, Z_n が独立で $N(0,1)$ に従うとき.

$$X = Z_1^2 + \dots + Z_n^2 \quad \text{が従う分布を.}$$

自由度 n の χ^2 分布 という

$0 < \alpha < 1$ に対し.



$P(X \geq k) = \alpha$ とする k の近似値を表にしたのが

χ^2 分布表 で この k を $\chi_n^2(\alpha)$ と書き χ^2 分布の α 点 という

例題7 → 問6.

定理7. X_1, \dots, X_n を $N(\mu, \sigma^2)$ から抽出した標本とすると.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)U^2}{\sigma^2} \quad \text{が成り立ち.}$$

これは自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う

☹ $S^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$ より等号がわかる.

概略.

まず $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$ は自由度 n の χ^2 分布に従う

← $N(0,1)$ に従う

μ を \bar{X} にかえると.

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \left(\sum X_i - n\bar{X} \right) = 0 \quad \text{なので}$$

自由度が1減る.

例題8 → 問7.