§3 線形作用素

H_1, H_2 は fin. dim. Hilbert sp. とする.

Def. 3.1.

$T : H_1 \to H_2$ が線形作用素 (operator, op.)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall x, y \in H_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し.

$$T(x+y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha \cdot Tx$$

T のノルム　"集合の中の最小なもの"

$$\|T\| := \inf\{K \geq 0 \mid \|Tx\| \leq K\|x\|\}$$

inf. dim. だと $+\infty$ もありえるが, fin. dim だと有限.

$$B(H_1, H_2) := \{T : H_1 \to H_2 \mid \text{op.}\}.$$

とくに $H_1 = H_2$ のとき $B(H_1, H_2) = B(H_1)$ とかく.

例 (1) 行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対し

$$\begin{array}{cccc} T_A : & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & Ax \end{array}$$

とすると $T_A \in B(\mathbb{C}^n)$ である.

とくに. $B(\mathbb{C}^n) = \{ T_A \mid A \in M_n(\mathbb{C}) \}$

$\because$ $T \in B(\mathbb{C}^n)$ として.

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$ とすると.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ として. $T = T_A$. 実際

$$T_A e_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} < j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i = Te_j$$

(2) $\forall x, y \in H$ に対し.

$$\begin{array}{cccc} |x\rangle\langle y| : & H & \longrightarrow & H \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & z & \longmapsto & \langle y, z \rangle \cdot x \end{array}$$

とすると $|x\rangle\langle y| \in B(H)$

$\because$ $|x\rangle\langle y|(z_1+z_2) = \langle y, z_1+z_2\rangle \cdot x$

$= \langle y, z_1\rangle \cdot x + \langle y, z_2\rangle x = |x\rangle\langle y|\cdot z_1 + |x\rangle\langle y| z_2.$

$|x\rangle\langle y|(\alpha z) = \langle y, \alpha z\rangle x = \alpha \cdot \langle y, z\rangle \cdot x = \alpha |x\rangle\langle y| z$ //.

なお $z \in B(H)$ を $|z\rangle$ とかくこともある. このとき

$|x\rangle\underbrace{\langle y||z\rangle}_{}$ となる.

すでに内積

<u>Thm 3.2</u>. $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

$\because$ $y=0$ のときは成立 $y \neq 0$ とする.

$\left\{\frac{y}{\|y\|}\right\}$ は ONS なので, Prop 1.20 (2) または (3) より

$\|x\|^2 \geq \left|\left\langle \frac{y}{\|y\|}, x\right\rangle\right|^2$ である.

$\therefore \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \geq |\langle y, x\rangle|^2 = |\langle x, y\rangle|^2.$ //.

<u>Prop 3.3</u>. $\||x\rangle\langle y|\| = \|x\|\cdot\|y\|.$

$\because$ $\||x\rangle\langle y|\cdot z\|^2 = \|\langle y, z\rangle x\|^2 = \langle \langle y, z\rangle \cdot x, \langle y, z\rangle \cdot x\rangle =$

$= \overline{\langle y, z \rangle} \cdot \langle y, z \rangle \cdot \langle x, x \rangle = |\langle y, z \rangle|^2 \cdot \|x\|^2$

$\leq \|y\|^2 \cdot \|x\|^2 \cdot \|z\|^2$. $\therefore \| |x\rangle\langle y| \| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

一方で. $\rightarrow \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.

$\| |x\rangle\langle y| \cdot y \| = \| \|y\|^2 \cdot x \| = \|y\|^2 \cdot \|x\|$

より. $\| |x\rangle\langle y| \| \geq \|x\| \cdot \|y\|$ //

Prop 3.4. $B(H_1, H_2)$ に.

$(T_1 + T_2) x = T_1 x + T_2 x$

$(\alpha T_1) x = \alpha \cdot (T_1 x)$ で 和とスカラー倍を def. すると.

linear sp. になる.

∵ 証明省略.

Prop 3.5. $|x\rangle\langle y| \circ |z\rangle\langle w| = \langle y, z\rangle \cdot |x\rangle\langle w|$.

∵ $|x\rangle\langle y| \circ |z\rangle\langle w| \cdot u = \langle w, u\rangle \cdot |x\rangle\langle y| \cdot z$

$= \langle w, u\rangle \langle y, z\rangle \cdot x = \langle y, z\rangle \cdot |x\rangle\langle w| \cdot u$. //

<u>Def 3.6</u>. $T \in B(H)$ に対し、$^\forall x, y \in H$ で

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

をみたす $T^* \in B(H)$ を、T の随伴作用素 (adjoint op.) という。

$\leadsto$ ㊟ $T^{**} = T$

$\longrightarrow$ このような T^* は必ず存在するが、授業では証明しない。

<u>Prop 3.7</u>. $T_A \in B(\mathbb{C}^n)$ に対し、

転置されていることに注意

$$T_A^{\ *} = T_{A^*} \qquad \text{ただし、} A^* = {}^t\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

∵ $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ より

$$\langle Tx, y \rangle = \langle T \cdot \sum \alpha_i e_i, \sum \beta_j e_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \beta_j \langle T e_i, e_j \rangle$$ となる。ここで

$\langle T_A e_i, e_j \rangle = \langle e_i, T_{A^*} e_j \rangle$ が示せれば

$$= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \beta_j \langle e_i, T_{A^*} e_j \rangle$$

$$= \langle x, T_{A^*} y \rangle$$ より $T_A^{\ *} = T_{A^*}$ が示せる。

$$\langle T_A e_i, e_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, e_j \rangle = \sum_k \overline{a_{ki}} \langle e_k, e_j \rangle = \overline{a_{ji}}$$

$$\langle e_i, T_A^* e_j \rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{jk}} e_k \rangle = \sum_k a_{jk} \langle e_i, e_k \rangle = \overline{a_{ji}} \quad //$$

Prop 3.8 $(|x\rangle\langle y|)^* = |y\rangle\langle x|$

∵ $\langle |x\rangle\langle y| \cdot z, w \rangle = \langle \langle y, z\rangle \cdot x, w \rangle$

$= \langle z, y\rangle \langle x, w \rangle = \langle z, \langle x, w\rangle \cdot y \rangle$

$= \langle z, |y\rangle\langle x| \cdot w \rangle \quad //$

Def 3.9 $U \in B(H)$ が $^\forall x, y \in H$ に対し、

$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$ をみたすとき ユニタリ作用素 という。
(unitary op.)

注 H が inf. dim. のときは U:全射 が必要.

Thm 3.10 次が同値.

恒等作用素
$Ix = x$

(1) U は unitary op.　　(2) $U^* U = I$

(3) $U U^* = I$　　　　つづく

(4). 任意の CONS $\{e_i\}_{i=1}^n$ に対し. $\{Ue_i\}_{i=1}^n$ が CONS.

(5) CONS $\{e_i\}_{i=1}^n$ で $\{Ue_i\}$ が CONS になるものが存在する.

∵ (1) ⇒ (2)

$\langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle = \langle U^*Ux, y \rangle$.

$\therefore U^*U = I$.

注 $\langle Tx, y \rangle = \langle Sx, y \rangle \quad {}^\forall x, y$
$\Rightarrow T = S$

(2) ⇒ (1)

$\langle Ux, Uy \rangle = \langle U^*Ux, y \rangle = \langle x, y \rangle$ //.

(2) ⇒ (3).

$U^*U = I$ より. $\ker U = \{0\}$. $\therefore \operatorname{ran} U = H$.

$\therefore {}^\forall x \in H, {}^\exists y \in H$ s.t $x = Uy$.

ここで. $UU^*x = UU^*Uy = Uy = x$ $\therefore UU^* = I$.

(3) ⇒ (2) も同様.

(1) ⇒ (4). $\{e\}_{i=1}^{n}$: CONS とすると.

$$\langle Ue_i, Ue_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

∴ $\{Ue_i\}$ は CONS

(4) ⇒ (5) 明らか.

(5) ⇒ (1)

$$\langle Ue_i, Ue_j \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} = \langle e_i, e_j \rangle$$ より

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \quad {}^\forall x, y \in H. \quad //$$

<u>Def 3.11</u> $A \in B(H_1)$, $B \in B(H_2)$ とする.

$$A \otimes B : H_1 \otimes H_2 \longrightarrow H_1 \otimes H_2$$

$$x \otimes y \longmapsto Ax \otimes By$$

とすると $B(H_1 \otimes H_2)$ に入る.

この $A \otimes B$ を A と B のテンソル積という.

注 正確には $(A \otimes B)\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i \otimes y_i)\right) = \sum_i \alpha_i Ax_i \otimes By_i$

Prop 1.12: 次が成立.

(1) $(A_1+A_2)\otimes B = A_1\otimes B + A_2\otimes B$.

(2) $A\otimes(B_1+B_2) = A\otimes B_1 + A\otimes B_2$.

(3) $\alpha(A\otimes B) = (\alpha A)\otimes B = A\otimes(\alpha B)$

∵ (1) $((A_1+A_2)\otimes B)(x\otimes y)$

$= ((A_1+A_2)x)\otimes By = (A_1x + A_2x)\otimes By$

$= A_1x\otimes By + A_2x\otimes By$ (2)も同様

(3) $\alpha(A\otimes B)(x\otimes y) = \alpha(Ax\otimes By) = (\alpha Ax\otimes By)$

$= ((\alpha A)\otimes B)(x\otimes y)$. など. //

Prop 1.13 $x, z, \xi \in H_1$, $y, w, \zeta \in H_2$ とする.

$|x\otimes y\rangle\langle z\otimes w| = |x\rangle\langle z|\otimes|y\rangle\langle w|$

∵ $|x\otimes y\rangle\langle z\otimes w|(\xi\otimes\zeta) = \langle z\otimes w, \xi\otimes\zeta\rangle x\otimes y$

$= \langle z,\xi\rangle\cdot\langle w,\zeta\rangle x\otimes y = (\langle z,\xi\rangle\cdot x)\otimes(\langle w,\zeta\rangle y) =$

$= (|x\rangle\langle z|\cdot\xi)\otimes(|y\rangle\langle w|\zeta) = (|x\rangle\langle z|\otimes|y\rangle\langle w|)\cdot\xi\otimes\zeta.$

Prop 1.14. $(A\otimes B)^* = A^*\otimes B^*$

$\because$ $\langle (A\otimes B)(x\otimes y), z\otimes w\rangle = \langle Ax\otimes By, z\otimes w\rangle$

$= \langle Ax, z\rangle\langle By, w\rangle = \langle x, A^*z\rangle\cdot\langle y, B^*w\rangle$

$= \langle x\otimes y, A^*z\otimes B^*w\rangle$

$= \langle x\otimes y, (A^*\otimes B^*)z\otimes w\rangle$ //

Prop 1.15. $U_1\in B(H_1), U_2\in B(H_2)$: ユニタリ

$\Rightarrow U_1\otimes U_2\in B(H_1\otimes H_2)$ もユニタリ

$\because$ $(U_1\otimes U_2)^*(U_1\otimes U_2) = (U_1^*\otimes U_2^*)\cdot(U_1\otimes U_2)$

$= U_1^*U_1\otimes U_2^*U_2 = I_1\otimes I_2.$ //

公理4. 量子状態 x への操作は ユニタリ U を用いて

Ux で表される

操作後の量子状態 注 $\|Ux\| = \|x\| = 1.$