§2 ヒルベルト空間のテンソル積

V, W を vector sp.（有限次元）とし．

$V \times W = \{ (x, y) : x \in V, y \in W \}$ を考える．

Def 2.1 $F : V \times W \to \mathbb{C}$ について．

$(x, y) \mapsto F(x, y)$

共役双線形汎関数全体

F が 共役双線形汎関数 $(F \in L(V \times W))$

$\overset{def}{\iff}$ $\forall x_1, x_2 \in V$, $y_1, y_2 \in W$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し．

(1) $F(x_1 + x_2, y_1) = F(x_1, y_1) + F(x_2, y_1)$

(2) $F(x_1, y_1 + y_2) = F(x_1, y_1) + F(x_1, y_2)$

(3) $F(\alpha x_1, y_1) = F(x_1, \alpha y_1) = \overline{\alpha} \cdot F(x_1, y_1)$

例．H_1, H_2 : Hilbert sp.，$\varphi \in H_1$, $\psi \in H_2$ とする．

$\varphi \otimes \psi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$

$(x, y) \longmapsto \langle x, \varphi \rangle \cdot \langle y, \psi \rangle$ とすれば．

$\varphi \otimes \psi \in L(H_1, H_2)$ がわかる

∵ $x_1, x_2 \in H_1$, $y_1, y_2 \in H_2$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し．

(1) $(\varphi \otimes \psi)(x_1 + x_2, y_1) = \langle x_1 + x_2, \varphi \rangle \cdot \langle y_1, \psi \rangle$

$= \langle x_1, \varphi \rangle \langle y_1, \psi \rangle + \langle x_2, \varphi \rangle \langle y_1, \psi \rangle$

$= (\varphi \otimes \psi)(x_1, y_1) + (\varphi \otimes \psi)(x_2, y_1)$

(2) も同様

(3) $(\varphi \otimes \psi)(\alpha x_1, y_1) = \langle \alpha x_1, \varphi \rangle \langle y_1, \varphi \rangle = \overline{\alpha} \cdot \langle x_1, \varphi \rangle \langle y_1, \varphi \rangle = \overline{\alpha} \cdot (\varphi \otimes \psi)(x_1, y_1)$

Def 2.2. $^\forall F, G \in L(V\times W)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し.

$$(F+G)(x,y) = F(x,y) + G(x,y)$$

$$(\alpha F)(x,y) = \alpha \cdot F(x,y)$$

で和とスカラー倍を定義すると. $L(V\times W)$ は vector sp. になる.

さて. $\underset{H_1}{\underset{\shortparallel}{V}}$ と $\underset{H_2}{\underset{\shortparallel}{W}}$ が Hilbert sp. のときを考えよう. $\varphi \in H_1$, $\psi \in H_2$ に対し.

$\varphi\otimes\psi \in L(H_1\times H_2)$ であり, $L(H_1\times H_2)$ は vector sp. なので.

$$\begin{aligned} H_1\otimes H_2 &:= \mathrm{span}\{\varphi\otimes\psi \mid \varphi\in H_1, \psi\in H_2\} \\ &= \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i\otimes\psi_i \;\middle|\; \varphi_i\in H_1, \psi_i\in H_2, \alpha_i\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

は. $L(H_1\times H_2)$ の部分空間 (subsp.) になる.

以下. これに内積を入れて内積空間にしたい. その前に次を示す

Lem. 2.3 $^\forall \varphi_i \in H_1$, $\Sigma\, \psi_j \in H_2$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$ に対し.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j\psi_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\cdot\beta_j(\varphi_i\otimes\psi_j)$$

∵ $\left(\left(\sum_i\alpha_i\varphi_i\right)\otimes\left(\sum_j\beta_j\psi_j\right)\right)(x,y)$ $\quad (x\in H_1, y\in H_2)$

$$= \langle x, \sum_i\alpha_i\varphi_i\rangle\cdot\langle y, \sum_j\beta_j\psi_j\rangle = \sum_i\alpha_i\cdot\sum_j\beta_j\langle x,\varphi_i\rangle\langle y,\psi_j\rangle$$

$$= \sum_i\sum_j\alpha_i\cdot\beta_j\cdot(\varphi_i\otimes\psi_j)(x,y)$$

より示せた.

$H_1 \otimes H_2$ に内積を定義しよう.

Def 2.4.

$H_1 \otimes H_2 \ni \varphi_1 \otimes \psi_1, \varphi_2 \otimes \psi_2$ に対し.

$\langle \varphi_1 \otimes \psi_1, \varphi_2 \otimes \psi_2 \rangle := \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \cdot \langle \psi_1, \psi_2 \rangle$ とし.

$H_1 \otimes H_2 \ni \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i \otimes \psi_i, \ \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \xi_j \otimes \zeta_j$ に対し.

$\langle \sum_i \alpha_i \cdot \varphi_i \otimes \psi_i, \sum_j \beta_j \cdot \xi_j \otimes \zeta_j \rangle := \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \cdot \beta_j \langle \varphi_i, \xi_j \rangle \cdot \langle \psi_i, \zeta_j \rangle$ とする.

Lem 2.5. この定義は well-defined すなわち. $\Phi, \Xi \in H_1 \otimes H_2$ に対し.

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i \otimes \psi_i = \sum_{i=1}^{n'} \alpha_i' \cdot \varphi_i' \otimes \psi_i'$$

$$\Xi = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \xi_j \otimes \zeta_j = \sum_{j=1}^{m'} \beta_j' \cdot \xi_j' \otimes \zeta_j'$$ と2通りの表し方があるとき.

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i \otimes \psi_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \xi_j \otimes \zeta_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n'} \alpha_i' \cdot \varphi_i' \otimes \psi_i', \sum_{j=1}^{m'} \beta_j' \cdot \xi_j' \otimes \zeta_j' \rangle$$

が成立する

∵ 証明省略 (参考書:フォック空間と量子場(上))

Prop 2.6. Def 2.4 の $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積の公理をみたす.

∵ まず. $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ を H_1 の CONS, $\{f_j\}_{j=1}^{m}$ を H_2 の CONS とし.

$\forall \Phi = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cdot \varphi_k \otimes \psi_k \in H_1 \otimes H_2$ を考えると.

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ki} \cdot e_i, \quad \psi_k = \sum_{j=1}^{m} \gamma_{kj} \cdot f_j$$

$(\beta_{ki} = \langle e_i, \varphi_k \rangle)$ $(\gamma_{kj} = \langle f_j, \psi_k \rangle)$ より

$$\Psi = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cdot \varphi_k \otimes \psi_k$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ki} \cdot e_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} \gamma_{kj} \cdot f_j \right)$$

$$= \sum_{i,j,k} \alpha_k \cdot \beta_{ki} \cdot \gamma_{kj} \, (e_i \otimes f_j)$$

$$= \sum_{i,j} \left(\sum_k \alpha_k \cdot \beta_{ki} \cdot \gamma_{kj} \right) \cdot (e_i \otimes f_j)$$ となる.

これより $H_1 \otimes H_2 = \mathrm{span}\{ e_i \otimes f_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \}$ である.

公理を示してみる.

(1),(2) $H_1 \otimes H_2 \ni {}^{\forall}\Psi = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot e_i \otimes f_j$ に対し.

$$\langle \Psi, \Psi \rangle = \left\langle \sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot e_i \otimes f_j , \sum_{k,l} \alpha_{kl} \cdot e_k \otimes f_l \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j,k,l} \overline{\alpha_{ij}} \cdot \alpha_{kl} \cdot \underbrace{\langle e_i \otimes f_j , e_k \otimes f_l \rangle}_{= \langle e_i, e_k \rangle \cdot \langle f_j, f_l \rangle = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}}$$

$$= \sum_{i,j} \overline{\alpha_{ij}} \cdot \alpha_{ij} = \sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2$$

より. $\langle \Psi, \Psi \rangle \geqq 0$ と.

$\langle \Psi, \Psi \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_{ij} = 0 \Rightarrow \Psi = 0$ がわかる.

(4). $H_1 \otimes H_2 \ni \Phi = \sum_{k,l} \beta_{kl} \, e_k \otimes f_l$ に対し.

$$\overline{\langle \Psi, \Phi \rangle} = \overline{\left\langle \sum_{i,j} \alpha_{ij} \, e_i \otimes f_j , \sum_{k,l} \beta_{kl} \cdot e_k \otimes f_l \right\rangle}$$

$$= \overline{\sum_{i,j,k,l} \overline{\alpha_{ij}} \cdot \beta_{kl} \cdot \langle e_i \otimes f_j , e_k \otimes f_l \rangle}$$

$$= \overline{\sum_{\substack{i,j\\k,l}} \overline{\alpha_{ij}} \cdot \beta_{kl} \cdot \langle e_i, e_k \rangle \langle f_j, f_l \rangle}$$

$$= \sum_{\substack{i,j\\k,l}} \alpha_{ij} \cdot \overline{\beta_{kl}} \langle e_k, e_i \rangle \langle f_l, f_j \rangle$$

$$= \sum_{\substack{i,j\\k,l}} \alpha_{ij} \cdot \overline{\beta_{kl}} \langle e_k \otimes f_l, e_i \otimes f_j \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{kl} \beta_{kl} \cdot e_k \otimes f_l, \sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot e_i \otimes f_j \right\rangle = \langle \Psi, \Phi \rangle$$ より示せる

(3) は省略. (※5) (Rem. $H_1 \otimes H_2$ は Hilbert sp. になる)

Prop. 2.7 $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ が H_1 の CONS, $\{f_j\}_{j=1}^{m}$ が H_2 の CONS のとき.

$\{e_i \otimes f_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ は $H_1 \otimes H_2$ の CONS.

∵ まず ONS を示す. $^\forall i,j, k,l$ に対し.

$$\langle e_i \otimes f_j, e_k \otimes f_l \rangle = \langle e_i, e_k \rangle \langle f_j, f_l \rangle = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$$

$$= \delta_{(i,j),(k,l)}$$ より ONS である.

また $^\forall \Phi \in H_1 \otimes H_2$ は $\Phi = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, e_i \otimes f_j$ とできることから.

$\langle \Phi, e_i \otimes f_j \rangle = 0$ $^\forall i,j$ ならば,

$$0 = \langle \Phi, e_i \otimes f_j \rangle = \left\langle \sum_{k,l} \alpha_{kl} \cdot e_k \otimes f_l, e_i \otimes f_j \right\rangle = \overline{\alpha_{ij}}$$ となり

$\Phi = 0$ となる ∴ CONS である //

例. $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \ni \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)$, $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2)$

$\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$, $\xi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)$

とすると. $\{\xi_1, \cdots, \xi_4\}$ は CONS.

∵ いくつか計算すると.

$$\langle \xi_1, \xi_1 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\langle e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_1 \rangle}_{=1} + \underbrace{\langle e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2 \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle e_2 \otimes e_2, e_1 \otimes e_1 \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle e_2 \otimes e_2, e_2 \otimes e_2 \rangle}_{=1} \Big)$$

$= 1$ である

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\langle e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_1 \rangle - \langle e_1 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2 \rangle + \langle e_2 \otimes e_2, e_1 \otimes e_1 \rangle - \langle e_2 \otimes e_2, e_2 \otimes e_2 \rangle \Big)$$

$= 0$ である. (☆6)

公理3. 量子状態 x_1, x_2 があったとき. その結合は

$x_1 \otimes x_2 \in H_1 \otimes H_2$ で表される.