内積空間

Def 1.16 $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ が次の条件を

$$(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

みたすとき、$\langle \cdot , \cdot \rangle$ を内積という

${}^\forall x, y, z \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$

(2) $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

(3) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$

(4) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

$(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ のことを内積空間という

Rem. 1.17 (i) 上の(3),(4)より

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \overline{\langle z, \alpha x + \beta y \rangle} = \overline{\alpha \langle z, x \rangle + \beta \langle z, y \rangle}$$

$$= \bar{\alpha} \langle x, z \rangle + \bar{\beta} \langle y, z \rangle$$

(ii) $\langle x, \mathbb{0} \rangle = \langle x, 0 \cdot \mathbb{0} \rangle = 0 \langle x, \mathbb{0} \rangle = 0$.

Exam 5 (1) $\mathbb{C}^n \ni x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ に対し.

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} \cdot y_i$ とするとこれは内積になる.

(2) $C[0,1] \ni f, g$ に対し.

$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx$ とすると内積になる.

∵ $\langle f, f \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} f(x) dx = \int_0^1 |f(x)|^2 dx$ より

(1) $\langle f, f \rangle \geq 0$ と

(2) $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ がわかる.

(3) $\langle f, \alpha g + \beta h \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} \cdot (\alpha g(x) + \beta h(x)) dx$

$= \alpha \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) + \beta \int_0^1 \overline{f(x)} h(x) dx$

$= \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle f, h \rangle$

(4) $\overline{\langle g, f \rangle} = \overline{\int_0^1 \overline{g(x)} f(x) dx} = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx$

$= \langle f, g \rangle$ //

Def 1.18. $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $x, y \in V$ とする.

(1) $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ を x のノルムという.

(2) $d(x, y) = \|x - y\|$ を x と y の距離という.

(3) この距離で完備な内積空間をヒルベルト空間という.

完備: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ に対し.

$\|x_n - x_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$ なら.

$^{\exists}x \in V$ s.t $\lim x_n = x$.

なお. finit dim. inner sp. は完備.

以下. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を Hilbert sp. とする.

Def 1.19. (1) $x, y \in H$ に対し.

$x \perp y \overset{\text{def}}{\iff} \langle x, y\rangle 0$ とし. このとき x と y は直交するという.

(2) $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subset H$ $(n=\infty$ もok) が正規直交系 (orthonormal system, ONS)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$

Prop 1.20 $x, y \in H$, $\{e_i\}_{i=1}^{n} \subset H$: ONS とする. $(n<\infty)$

(1) $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

(2) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, x\rangle|^2 + \|x - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i\|^2$

(3) $n=\infty$ のときも

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i, x\rangle|^2 .$$

∵ (1) $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x+y, x\rangle + \langle x+y, y\rangle$

$= \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$

$= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$ ← ここまでを公式のように よく使う.

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 .$

(2) $\|x - \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i\|^2$

$= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, \sum_{i=1}^{n}\langle e_i, x\rangle e_i\rangle + \langle \sum_{i=1}^{n}\langle e_i, x\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n}\langle e_j, x\rangle e_j\rangle$

$= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, x\rangle\langle x, e_i\rangle + \sum_{i,j}\overline{\langle e_i, x\rangle}\langle e_j, x\rangle\langle e_i, e_j\rangle$

$= \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{n}|\langle e_i, x\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{n}|\langle e_i, x\rangle|^2 =$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, x\rangle|^2 .$$

(3). (2) で $n \to \infty$ とすればよい.

Def 1.21 $\{e_i\}_{i=1}^{n} \subset H$ が ONS であるとき ($n=\infty$ も OK)

$\{e_i\}_{i=1}^{N}$ が完全正規直交系 (complete ONS, CONS)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall i$ で $x \perp e_i \Rightarrow x = 0$

Thm 1.22 $\{e_i\}_{i=1}^{n} \subset H$ が ONS であるとき. ($n=\infty$ も OK) 次は同値

(1) $\{e_i\}$ が CONS

(2) ${}^\forall x \in H$ に対し

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i$$

(3) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, x\rangle|^2$

(4) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle$

∵ $n=\infty$ のときだけ示す. $n<\infty$ のときはよりかんたん.

(1) ⇒ (2)

$x_k = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i, x \rangle e_i$ とすると $k > l$ に対し.

$$\|x_k - x_l\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{k} \langle e_i, x \rangle e_i - \sum_{i=1}^{l} \langle e_i, x \rangle e_i \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{i=l+1}^{k} \langle e_i, x \rangle e_i \right\|^2.$$

$$= \left\langle \sum_{i=l+1}^{k} \langle e_i, x \rangle e_i , \sum_{j=l+1}^{k} \langle e_j, x \rangle e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j} \overline{\langle e_i, x \rangle} \langle e_j, x \rangle \langle e_i, e_j \rangle$$

$$= \sum_{i=l+1}^{k} |\langle e_i, x \rangle|^2 \longrightarrow 0 \quad (k, l \to \infty)$$

$\therefore$ $\lim_{k \to \infty} x_k = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i$ が存在. さらに.

有限次元のばあいは. ここからで OK

$$\left\langle e_m, x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i \right\rangle$$

$$= \langle e_m, x \rangle - \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle \langle e_m, e_i \rangle = 0$$

$\therefore$ (1) より $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i$

(2)⇒(3) $\lim x_k = x \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim \|x - x_k\| = 0$ を使う.

$x - \sum_{i=1}^{k} \langle e_i, x \rangle e_i \to 0$ である.

$$\|x - \sum_{i=1}^{k} \langle e_i, x \rangle e_i\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\langle e_i, x \rangle|^2$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i, x \rangle|^2.$$

$$\therefore \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i, x \rangle|^2.$$

(3)⇒(4)

$$\|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x - y\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i, x - y \rangle|^2.$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} (\langle e_i, x \rangle - \langle e_i, y \rangle)\overline{(\langle e_i, x \rangle - \langle e_i, y \rangle)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(|\langle e_i, x \rangle|^2 + |\langle e_i, y \rangle|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle \right)$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$$

$\therefore \mathrm{Re}\langle x, y \rangle = \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$ となる. 一方.

$\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\, -i\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, -iy\rangle$

$= \mathrm{Re}\sum_{i=1}^{\infty}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, -iy\rangle$

$= \mathrm{Im}\sum\langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle$ ∴示せた.

(4) ⇒ (1)

${}^{\forall}i$ に対し. $\langle x, e_i\rangle = 0$ とすると

$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, x\rangle = 0$ ∴ $x = 0$.

公理1

量子状態は $x \in H$, $\|x\| = 1$ で表される

公理2

量子状態 x を. CONS $\{e_i\}$ で観測できる.

この観測で. 数値 i が確率 $|\langle e_i, x\rangle|^2$ で検出され.

その後量子状態は e_i へ変化する.