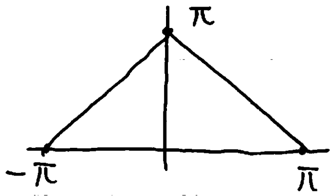
応用数学II ― フーリエ解析

フーリエ級数

フーリエ級数は、関数を三角関数の和で表したものである。例えば、

$f(x) = \pi - |x|$ （右のグラフ）



という関数は、

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x \cdots\right)$$

という形で表すことができる

→ フーリエ級数は関数を波の形に分解している。

準備：講義でよく使う公式・性質 （n, mは自然数）

① $[-a, a]$上で定義された関数 $f(x)$ が

偶関数 $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)\cdot dx$

奇関数 $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

② $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = 2\pi$

③ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0$

④ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$

⑤ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$

⑥ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx \, dx = 0$

⑦ (偶関数)×(偶関数)，(奇関数)×(奇関数) は偶関数

(偶関数)×(奇関数) は奇関数

④の証明. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$ より.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nx\cdot dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)dx$$

②と③より
積分が0にならないのは
$\cos(m-n)x=1$ のときだけ.

$$=\begin{cases}\pi & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$

問題. ②, ③, ⑤, ⑥ を証明せよ.

答 ②: $\int_{-\pi}^{\pi}1\ dx=[x]_{-\pi}^{\pi}=2\pi$

③: $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot dx=\left[\frac{1}{n}\cdot\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}=0$

$\sin nx$ は奇関数なので. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot dx=0$.

⑤: $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$ より

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right)dx$$

$$=\begin{cases}\pi & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$$ (④のときと同じ理由)

⑥: $\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))$ と. sin が奇関数なので.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(\sin(m+n)x-\sin(m-n)x)dx=0.$$

フーリエ級数とフーリエ係数

関数 $f(x)$ が 周期 2π であるとする. すなわち $f(x)=f(x+2\pi)$ である.

さらに. $f(x)$ が三角関数の級数で表されていたとする. すなわち.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx+b_n\cdot\sin nx)$$

となっていたとする.

この係数である a_n, b_n を求めるには．次の計算をすればよい．

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot\sin nx)\, dx = \pi\cdot a_0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos mx\cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cdot\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx\cdot\cos mx + b_n\cdot\sin nx\cdot\cos mx)\, dx$$

$$= a_m\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos mx\cdot dx = \pi\cdot a_m.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin mx\cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx\cdot\sin mx + b_n\cdot\sin nx\cdot\sin m\cdot x)\, dx$$

$$= b_m\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin mx\cdot dx = \pi\cdot b_m.$$

これらから フーリエ級数を定義する

定義 1.1．周期 2π の関数 $f(x)$ について．

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\cdot dx \qquad (n=1,2,\cdots)$$ とし．

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot\sin nx)$$

を $f(x)$ の フーリエ級数 または フーリエ展開 といい．

その係数 a_n, b_n を フーリエ係数 という．

とくに．a_n を (フーリエ)余弦係数．b_n を 正弦係数 という

例題 3.1.2．

問題 3.1．