問題集その5 解答例

1 (1) $\varphi_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ -1 & t & -1 \\ 0 & -2 & t \end{vmatrix}$

$= t^2(t-1) + 2 - 2t - 2(t-1) = t^2(t-1) - 4(t-1)$

$= (t-1)(t-2)(t+2)$. $\therefore$ 固有値は $1, 2, -2$.
重複度はそれぞれ 1.

固有値 1 の固有ベクトルを求める

$(E-A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$.

これを解くと. $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$.

$\therefore$ $y = t$ とすれば. $z = 2t$, $x = y - z = -t$.

$\therefore$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 2t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトル

$V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(1) = 1$

固有値2のとき (以下、途中計算省略)

$(2E-A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解けば、$y=t$として

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトル

$V(2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(2) = 1$.

固有値−2のとき

$(-E-A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解けば、$y=t$として

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ -t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトル.

$V(-2) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(-2) = 1$.

(2) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)-2$

$= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$

∴ 固有値は 1 と 4. 重複度はともに 1.

固有値 1 のとき

$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ をとくと. $y = -t$ とすれば $x = 2t$.

∴ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ -t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトルで.

$V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(1) = 1$.

固有値 4 のとき,

$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ をとくと $x = t$ として, $y = t$ となる

∴ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトルで.

$V(4) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(4) = 1$.

(3) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t & -2 & 0 \\ 2 & t-1 & -3 \\ 0 & -2 & t \end{vmatrix} = t^2(t-1) - 6t + 4t$

$= t(t^2 - t - 2) = t(t-2)(t+1)$

$\therefore$ 固有値は $2, 0, -1$ 重複度は全て1.

固有値2のとき.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ をとくと. $x = t$ として. $y = z = t$.

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトルで.

$V(2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(2) = 1$

固有値0のとき

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ をとくと. $x = 3t$ として $y = 0$, $z = 2t$.

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトルで.

$V(0) = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(0) = 1$

固有値−1 のとき

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ をとくと. $y=-t$ として. $x=z=2t$

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ -t \\ 2t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトルで.

$V(-1) = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(-1) = 1$ である.

(4) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3.$

∴ 固有値は 1, 重複度は 3.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ をとけば. $z=0$ より $x=t, y=s$ として.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $((t,s) \neq (0,0))$ が固有ベクトルで

$V(1)=\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(1)=2$ である

(5) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2+1=(t+i)(t-i)$

∴ 固有値は $i, -i$. 重複度はともに 1.

固有値 i のとき.

$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$ をとくと. $x=t$ として. $y=it$.

∴ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ it \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトルで.

$V(i)=\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(i)=1$.

固有値 $-i$ のとき.

$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=0$ をとくと. $x=t$ として $y=-it$.

∴ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ -it \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトルで.

$V(-i)=\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(-i)=1$ である.

（計算は省略しているが、試験などではきちんとかくこと）

2.(1) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 2 & 0 \\ -1 & t+3 & -1 \\ 0 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t+3)+2(t-2)+2(t-2)$

$= (t-2)(t^2+t-6+4)$

$= (t-2)(t+2)(t-1)$

∴ 固有値は 1, 2, −2, ∵ 異なる3つの固有値をもつので対角化可能

$V(1)$ は，$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より　$y=t$ として
$x=z=2t$.

∴ $V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$V(2)$ は $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より　$y=0$, $x=t$ として
$z=-t$.

∴ $V(2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$V(-2)$ は $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より　$x=t$ として
$y=2t$, $z=t$

$\therefore V(-2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ $\therefore P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば.

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & -2 \end{bmatrix}$ となる

(2) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t & 2 & -2 \\ -1 & t+3 & -1 \\ -2 & 2 & t \end{vmatrix} = t^2(t+3)+8+4t-4(t+3)$

$= t^3+3t^2-4$

$= (t-1)(t+2)^2$ $\therefore$ 固有値は 1 と -2
重複度はそれぞれ 1 と 2.

ここで $V(1)$ は. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ をとくと. $y=t$ として.
$x=z=2t$.

$\therefore V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ $\therefore \dim V(1) = 1$

$V(-2)$ は $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ をとくと.

$x=t,\ y=s$ として $z=-t+s$.

$\therefore V(-2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ $\quad \therefore \dim V(-2) = 2$.

∴重複度と固有空間の次元が一致するので対角化可能

ここで $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & -2 \end{bmatrix}$ となる.

(3) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ 0 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3$ より 固有値は 1

重複度は 3.

$V(1)$ は $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $y = z = 0$.

$\therefore V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, $\dim V(1) = 1$. ∴対角化できない.

(4) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -3 \\ -3 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2 - 9 = (t-4)(t+2)$.

∴固有値は 4, −2. 異なる2つの固有値をもつので対角化可能.

$V(4)$ は $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ より $V(4) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$V(-2)$ は $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ より $V(-2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\therefore P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(5) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ -1 & t-1 & -1 \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix} = t^2(t-1) - 2t = t(t-2)(t+1)$

$\therefore$ 固有値は $0, 2, -1$ となり異なる3つの固有値をもつので対角化可能

$V(0)$ は $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $V(0) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$V(2)$ は $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $V(2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$V(-1)$ は $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $V(-1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\therefore$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}$ となる.

(6) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3$

ここで $V(1)$ は $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\therefore$ $\dim V(1) = 2$ で重複度と一致しないから対角化不可.

(7) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t+3 & 0 & 0 \\ -4 & t-5 & 4 \\ -2 & -4 & t+5 \end{vmatrix} = (t+3)\left((t-5)(t+5)+16\right)$

$= (t-3)(t+3)^2$.

ここで $V(3)$ は $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $V(3) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$V(-3)$ は $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $V(-3) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\therefore$ $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & & 0 \\ & -3 & \\ 0 & & -3 \end{bmatrix}$ である.

(8) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2+1$.

ここで $V(i)$ は $\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ より $V(i) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle$

$V(-i)$ は $\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ より $V(-i) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\rangle$

$\therefore P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$ とすれば. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ となる.

3.(1) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3-2-3(t-1)$

$= t^3-3t^2 = t^2(t-3)$.

ここで $V(3)$ は $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $V(3) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

であるが. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を正規化し. $V(3) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ としておく.

$V(0)$ は $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $V(0) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

であるが，$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ にグラム・シュミットの直交化法を用い，

$$V(0)=\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}\right\rangle$$ としておく．

ここで $P=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -2\end{bmatrix}$ は直交行列で

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & & 0\\ & 0 & \\ 0 & & 0\end{bmatrix}$ となる．

(2) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-1 & 2\\ 2 & t-1\end{vmatrix}=(t-1)^2-4=(t+1)(t-3)$.

ここで $V(3)$ は $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$ より $V(3)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\rangle=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$

$V(-1)$ は $\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$ より $V(-1)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\rangle=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$.

$\therefore$ $P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ は直交行列で $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ である

(3) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -2 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-2) - 4 - 2(t-1) - 4(t-2)$

$= (t-1)^2(t-2) - 6(t-1) = (t-1)(t-4)(t+1)$

ここで $V(4)$ は $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より

$V(4) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$V(1)$ は $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より $V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$V(-1)$ は $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ より

$V(-1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\therefore P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ とすれば

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}$ である.