解答その2.

1.(1). $A=[v_1\ v_2]=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$ とすると.

$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=2.$

∴ベクトルの個数と rank A が一致するので1次独立

(2) $\mathrm{rank}[v_1\ v_2\ v_3]=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}=2.$

∴1次従属.

(3) $\mathrm{rank}[v_1\ v_2]=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}2&3\\3&1\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}2&3\\0&-\frac{7}{2}\end{bmatrix}=2.$

∴1次独立

(4) $\mathrm{rank}[v_1\ v_2\ v_3]=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}=3$

∴1次独立

(5) $\mathrm{rank}[v_1\ v_2\ v_3]=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&3&-1\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&2&-2\end{bmatrix}$

$=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=2$

∴1次従属.

2. $\mathrm{rank}[e_1\ e_2\ e_3] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = 3$　∴ 1次独立.

また $^\forall[x\ y\ z]^t \in \mathbb{C}^3$ に対し　(t は転置)

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

∴ 生成系　　∴ e_1, e_2, e_3 は $\mathbb{C}^3$ の基底.

3 (1) $\mathrm{rank}[v_1\ v_2\ v_3] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\0&3&1\end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}$

$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = 3$　∴ 1次独立.

また $^\forall[x.y.z]^t \in \mathbb{C}^3$ に対し.

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$ とおくと.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\1&2&1&y\\0&3&1&z\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&1&0&y-x\\0&3&1&z\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2x-y\\0&1&0&y-x\\0&0&1&3x-3y+z\end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & -x+2y-z \\ & 1 & & y-x \\ 0 & & 1 & 3x-3y+z \end{array}\right] \text{より}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-x+2y-z)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (y-x)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (3x-3y+z)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\therefore$ 生成系. $\therefore$ 基底である.

(2) $\operatorname{rank}[v_1\ v_2] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2.$

$\therefore$ 1次独立. また, $\forall [x\ y]^t \in \mathbb{C}^2$ に対し

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすれば.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y-x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & & 3x-2y \\ & 1 & y-x \end{array}\right].$$

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (y-x)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (3x-2y)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ より 生成系 $\therefore$ 基底

(3) $\operatorname{rank}[v_1\ v_2\ v_3] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$

$\therefore$ 1次独立

また $^\forall [x\ y\ z]^t \in \mathbb{C}^3$ に対し.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ とすると.

$$\begin{cases} a+b=x \\ a-b=y \\ c=z \end{cases}$$ より $$\begin{cases} a=\dfrac{x+y}{2} \\ b=\dfrac{x-y}{2} \\ c=z \end{cases}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{x+y}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{x-y}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

∴生成系である. 以上より基底となる

(4) $\mathrm{rank}[v_1\ v_2\ v_3] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3$ ∴1次独立である.

また. $^\forall [x.\ y\ z]^t \in \mathbb{C}^3$ に対し.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ とすると.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 3 & -1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 2 & -2 & z-x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2x-y \\ 0 & 1 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & -2 & x-2y+z \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \frac{5}{2}x-2y+\frac{1}{2}z \\ & 1 & & y-x \\ & & 1 & -\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}z \end{array}\right]$$ より

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left(\frac{5}{2}x-2y+\frac{1}{2}z\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (y-x)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}z\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

∴生成系であり、基底となる.

4(1) $x+y=0$ を解くと. 係数行列 $A=[1\ \ 1]$ は

$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}[1\ \ 1]=1$ より解の自由度は1.

∴ $x=t$ とすれば $y=-x=-t$.

∴ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ∴ $V=\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

ここで $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ は1次独立より. これはVの基底 ∴ $\dim V = 1$.

(2) $x + 2y = 0$ を解くと. $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = 1$ より $y = t$ として.

$x = -2t$. ∴ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ∴ $V = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

ここで $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ は1次独立なので. Vの基底である ∴ $\dim V = 1$.

(3). $x + y + z = 0$ を解くと. $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$ より

$x = t, y = s$ とすれば $z = -t-s$.

∴ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t-s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ∴ $V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

ここで $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ は

1次独立 ∴ Vの基底 ∴ $\dim V = 2$

(4) $\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y+w+2z=0 \end{cases}$ を解くと.

$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2$ より.

$y=t,\ z=s$ とすれば. $x=-t$ $w=-t-2s$.

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ s \\ -t-2s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\therefore V = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$

ここで $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$ よりこれは1次独立.

$\therefore$ 基底であり. $\dim V = 2$ となる.

5. $x+2y+3z=0$ を解けば. $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 1$ より

$y=t,\ z=s$ として. $x=-2t-3s$.

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t-3s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ ここで

$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$ より

これは1次独立. ∴基底. $\therefore \dim W_1 = 2$.

次に $x = y = z$ をとくと. $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2$ より

$x = t$ として $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\therefore W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は1次独立よりこれは基底. $\therefore \dim W_2 = 1$.

次に $\begin{cases} x = y = z \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ を解くと. $x + 2x + 3x = 0$ より $x = 0$.

$\therefore x = y = z = 0$ となる

$\therefore W_1 \cap W_2 = \{0\}$. $\therefore \dim W_1 \cap W_2 = 0$.

以上より $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 = 3$

となる

6. $2x+2y+z+w=0$ をとくと. $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}2 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}=1$ より

$x=t,\ y=s,\ z=r$ として, $w=-2t-2s-r$.

$$\therefore \begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-2\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-2\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\quad \therefore W_1=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$$

ここで $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-2 & -2 & -1\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\\ & & \end{bmatrix}=3$ よりこれは1次独立.

$\therefore$ これは基底なので. $\dim W_1=3$.

$x=y,\ z=w$ をとけば. $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}=2$ より.

$x=t,\ z=s$ とおいて.

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\quad \therefore W_2=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle.$$

ここで $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=2$ より 1次独立

∴基底となり $\dim W_2 = 2$.

$$\begin{cases} 2x+2y+z+w=0 \\ x=y \\ z=w \end{cases}$$ をとくと

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 3$$ より.

$x=t$ とすれば. $y=t$, $z=w=-2t$.

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \therefore W_1 \cap W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ は1次独立

$\therefore \dim W_1 \cap W_2 = 1$

$$\therefore \dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$$

$$= 3+2-1 = 4$$