解答例

1. $\mathrm{rank}[v_1\ v_2\ v_3] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$ $\quad\therefore$ v_1, v_2, v_3 は1次独立.

$\dim \mathbb{C}^3 = 3$ より v_1, v_2, v_3 は $\mathbb{C}^3$ の基底である.

2. $[e_1\ e_2\ e_3] = [u_1\ u_2\ u_3]P$ をみたす P を求めればよい.

ここで $[u_1\ u_2\ u_3]^{-1}$ を求めると.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 3 & 1 & & 1 & \\ 1 & 2 & -2 & & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & \frac{8}{15} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{15} \\ & 1 & & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} \\ & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$

となる $\therefore P = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 9 & -6 \end{bmatrix}$ である

3. C はエルミートより対角化可能.

$$\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & 2 & 0 \\ -1 & t+3 & -1 \\ 0 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t+3) + 2(t-2) + 2(t-2)$$

$= (t-2)(t^2+t-6+4) = (t-2)(t^2+t-2)$

$= (t-2)(t+2)(t-1)$

$\therefore$ A の固有値は $1, 2, -2$ であり, 異なる3つの固有値をもつので, A は対角化可能.

$\therefore$ 対角化可能でないのは B.

別解 $\varphi_B(t)=(t-1)^2(t-3)$ であり

Bについて $V(1)=\left\langle \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$ より $\dim V(1)=1$ で

重複度と一致しないため対角化可能でない.

4. $\varphi_D(t)=\begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ -1 & t-1 & -1 \\ -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3-2-3(t-1)$

$= t^3-3t^2+3t-1-2-3t+3 = t^3-3t^2$

$= t^2(t-3)$ より固有値は0, 3

$V(0)$ を求めるために

$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0$ を解く

$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $x=t,\ y=s$ として

$z=-t-s$.

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t-s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\therefore V(0) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$V(3)$は

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ をとくと.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $z = t$ とすれば. $y = t$, $x = t$ なので.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore V(3) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ とすれば. $$P^{-1}DP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ となる.