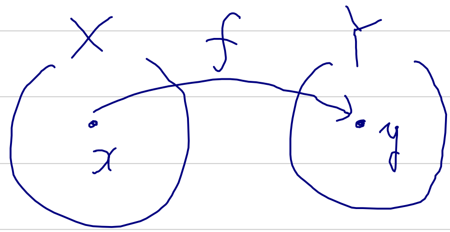
§2. 線形写像

<u>定義2.1</u>. X, Y を集合とする. $\forall x \in X$ に対し. $y \in Y$ を1つ決める対応を X から Y への**写像**とよび.

$$f: X \longrightarrow Y \quad \text{と表す.}$$
$$\begin{array}{ccc} \mathbin{\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$}} & & \mathbin{\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$}} \\ x & \longmapsto & y \end{array}$$



このとき X を f の**定義域**, Y を**値域**という.

また. $y = f(x)$ を. x の f による**像**という.

<u>例</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

(i) $f(x) = x^2 + 1$, (ii) $f(x) = 3x$ (iii) $f(x) = \sin x$

などとすれば. これらは写像である

以下, f は線形空間 V から線形空間 W への写像とする.

<u>定義2.2</u>. $f: V \longrightarrow W$ が次の条件をみたすとき, f は**線形写像**という

$\forall x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

注 この定義からただちに、

$$f(\mathbb{0}) = f(0\cdot\mathbb{0}) = 0\cdot f(\mathbb{0}) = 0$$

$$f(-x) = f((-1)\cdot x) = (-1)f(x) = -f(x)$$ がわかる。

例1 A を (m,n) 行列とし、

$$f_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m, \quad x \longmapsto Ax$$

で f_A を定義すると、f_A は線形写像

$\because$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し、

$$f_A(x+y) = A(x+y) = A\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right)$$

$$= A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + A\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = Ax + Ay = f_A(x) + f_A(y)$$

$$f_A(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha\cdot Ax = \alpha f_A(x)$$

//

例2 V を何回でも微分可能な $\mathbb{R}$ 上の関数全体とすると、

$$\frac{d}{dx} : V \longrightarrow V, \quad f \longmapsto \frac{d}{dx}f$$

は線形写像になる

注 (1) $V=W$ のとき、f を線形変換ともいう。

(2) $$\begin{array}{rccc} 1_V : & V & \to & V \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$ を恒等写像という。

(3) $f: V \to W,\ g: W \to U$ のとき、

$$\begin{array}{rccc} g\circ f : & V & \to & U \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$ を f と g の合成写像という。

なお $g\circ f$ も線形写像になる

以下、写像は全て線形とする。

定義2.3 $f: V \to W$ とする

$\mathrm{Im} f = \{ f(x) \mid x \in V \}$ を f の像という。$f(V)$ ともかく。

$\ker f = \{ x \in V \mid f(x) = 0 \}$ を f の核という。

命題2.4

(1) $\mathrm{Im} f$ は W の部分空間

(2) $\ker f$ は V の部分空間

∵ (1). $x, y \in \mathrm{Im} f$ とすると、$v, w \in V$ が存在して、

$f(v) = x$, $f(w) = y$ とできる　ここで.

$x + y = f(v) + f(w) = f(v + w) \in \mathrm{Im} f$.

$\alpha x = \alpha f(v) = f(\alpha v) \in \mathrm{Im} f$.

(2). $x, y \in \ker f$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し.

$f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$　　$\therefore x + y \in \ker f$

$f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \cdot 0 = 0$　　$\therefore \alpha x \in \ker f$ //

例1, 問2, 3

定理2.5 $f : V \to W$ に対し.

$\dim V = \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f$ が成立

∵ $w_1, \cdots, w_k$ を $\mathrm{Im} f$ の基底とすると.

$u_1, \cdots, u_k \in V$ で $f(u_i) = w_i$ をみたすものがある.

また. $v_1, \cdots, v_l$ を $\ker f$ の基底とする

ここで $u_1,\cdots,u_k,v_1,\cdots,v_\ell$ が V の基底になることを示す.

1次独立

$\sum\alpha_i u_i+\sum\beta_j v_j=0$ とする. これを f で写すと

$$0=f\left(\sum\alpha_i u_i+\sum\beta_j v_j\right)=\sum\alpha_i f(u_i)+\sum\beta_j \sum f(v_j)$$

$$=\sum\alpha_i w_i \qquad \therefore\ \alpha_i=0 \quad ({}^\forall i)$$

$\therefore\ \sum\beta_j v_j=0 \quad \therefore\ \beta_j=0 \quad ({}^\forall j)$ ∴ 1次独立.

生成系

${}^\forall x\in V$ に対し $f(x)=\sum\alpha_i w_i$ とすると.

$f\left(\sum\alpha_i u_i\right)=f(x)$ より $x-\sum\alpha_i u_i\in\ker f$

$\therefore\ x-\sum\alpha_i u_i=\sum\beta_j v_j$ とできる

$$\therefore\ x=\sum\alpha_i u_i+\sum\beta_j v_j$$

//