§1.3 1次独立

<u>定義1.8</u>. $v_1, \cdots, v_k \in V$ が次の条件をみたすとき,

ベクトルの組 $v_1, \cdots, v_k$ は 1次独立 であるという.

条件: $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ に対し.

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad (\forall i)$$

また, 1次独立でないとき, 1次従属という.

例皿(1). $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$ とすると. $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$ $\therefore \alpha = \beta = 0$

$\therefore v_1, v_2$ は 1次独立.

(2). $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ を考える.

例えば. $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -1$ とすれば. 上の等式が成り立つ

$\therefore v_1, v_2, v_3$ は 1次従属.

問皿 (3) ~ (5)

<u>注</u>. $v_1, \cdots, v_k$ の中に 0 が1つでも入ると 1次従属になる.

$\mathbb{C}^n$のベクトルが1次独立になる条件

$$\mathbb{C}^n \ni v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \cdots, v_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$$

が1次独立になる条件を考える.

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_k a_{1k} \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_k a_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \cdots + \alpha_n a_{nk} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}}_{x\text{ とする}}$$

となるので

$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0$ は $Ax = 0$ とかける.

また. $\alpha_i = 0 \ (\forall i)$ は $x = 0$ とできる.

つまり、この連立方程式 $Ax=0$ が、

自明な解 0 のみをもつ $\Rightarrow$ 1次独立

自明でない解をもつ $\Rightarrow$ 1次従属 である。

ここで 自明な解のみもつ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}\,A=k$ だった

またこの行列 A を $A=[v_1\ v_2 \cdots v_k]$ とかくと、次を得る

定理1.9 $v_1,\cdots,v_k\in\mathbb{C}^n$ が1次独立である必要十分条件は

$\mathrm{rank}[v_1 \cdots v_k]=k$ である。

系1.10 $v_1,\cdots,v_k\in\mathbb{C}^n$ が1次従属である必要十分条件は

$\mathrm{rank}[v_1 \cdots v_k]<k$ である。

系1.11 (1) $k>n$ ならば、$v_1,\cdots,v_k\in\mathbb{C}^n$ は1次従属

(2) $v_1,\cdots,v_n\in\mathbb{C}^n$ に対し次は同値。ただし $A=[v_1\cdots v_n]$ とする。

(a) $v_1,\cdots,v_n$ は1次独立　(b) $\mathrm{rank}\,A=n$

(c) $|A|\neq 0$　(d) A は正則行列。

∵ (1) (m,n) 行列の rank は最大でも $\min\{m,n\}$ より

$\mathrm{rank}[v_1 \cdots v_k] \leq \min\{n,k\} = n < k$. //.

(2) は明らか //.

例 IV (1), (2). 問 IV (3) 〜 (5)

命題 1.12. V において次が成立

(1) $v_1, \cdots, v_n \in V$ が1次独立なら, $^\forall k \leq n$ に対し,

$v_1, \cdots, v_k$ が1次独立.

(2) $v_1, \cdots, v_n \in V$ が1次従属なら. $^\forall u \in V$ に対し.

$v_1, \cdots, v_n, u$ も1次従属.

(3) $v_1, \cdots, v_n$ が1次独立で $v_1, \cdots, v_n, u$ が1次従属なら.

u は $v_1, \cdots, v_n$ の1次結合でかける.

∵ (1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0$ とすると. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} 0 \cdot v_i = 0$.

∴ 1次独立の仮定から. $\alpha_i = 0$ $(^\forall i)$.

(2) $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ の自明でない解とすると.

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + 0 \cdot u = 0$ $\quad\therefore$ 1次従属.

(3) $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$ を $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \beta u = 0$ の自明でない解とする.

もし $\beta = 0$ なら. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ より $\alpha_i = 0$ $(\forall i)$ $\therefore$ 矛盾.

$\therefore \beta \neq 0$ で. $u = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\alpha_i}{\beta} v_i$. とできる //