§2 エントロピー

<u>定義2.1.</u> $p=(p_1,\cdots,p_n)\in\mathbb{R}^n$ が．

$\forall i$ について $p_i\geq 0$ で，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ をみたすとき．p を確率という．

<u>定義2.2.</u> 確率 $p\in\mathbb{R}^n$ に対し．p のエントロピーを．

$S(p)=\sum_{i=1}^{n}-p_i\log p_i$ で定義する．ただし $0\cdot\log 0=0$ とする

<u>考察</u>．情報の価値を表す関数を f とすると．

コイントス1回の結果の情報の価値は $f(\frac{1}{2})$ となる．

コイントス2回の価値は．$f(\frac{1}{4})$，$2f(\frac{1}{2})$ となるので．

$f(\frac{1}{4})=2f(\frac{1}{2})$ が必要．もっと一般に．

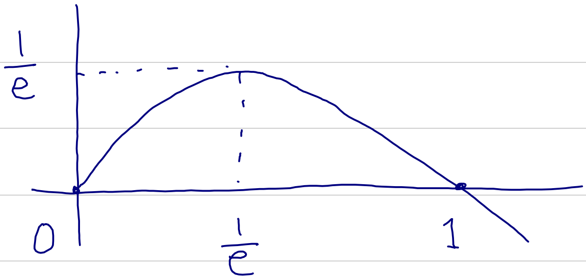
$f((\frac{1}{e})^k)=kf(\frac{1}{e})$ となる．これをみたす f は．

$f(x)=\alpha\log x$ である．

エントロピーの定義では $f(x)=-\log x$ として．

$S(p)$ はこの期待値になる．

なお. $\eta(x) = -x\log x$ のグラフは.



である.

∵ $\eta'(x) = -\log x - 1$ と

$$\lim_{x\to+0}\eta(x) = \lim -\frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim -\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim x = 0$$ より

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$\eta'(x)$		$+$	0	$-$	
$\eta(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

である.

//

命題 2.3 確率 $p \in \mathbb{R}^n$ について.

$0 \leq S(p) \leq \log n$ であり.

$S(p) = 0 \iff p = (1, 0, \cdots, 0)$

$S(p) = \log n \iff p = \left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$ となる.

$\because$ $S(p) \geq 0$ は明らか.

$$S(p) = 0 \iff -p_i \log p_i = 0 \quad \forall i$$

$$\iff p_i = 0, 1 \quad \forall i.$$

$$\iff p = (1, 0, \cdots, 0)$$

次に. $\eta''(x) = -\frac{1}{x} < 0.$ より η'' は凹関数.

$$\therefore \frac{\eta(x)+\eta(y)}{2} < \eta\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

$\therefore$ もし $p = (p_1, \cdots, p_n)$ で. $p_1 \neq p_2$ なら.

$$S(p) = \sum_{i=1}^{n} -p_i \log p_i = \sum_{i=1}^{n} \eta(p_i)$$

$$< 2\eta\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right) + \sum_{i=3}^{n} \eta(p_i)$$

$$= S\left(\left(\frac{p_1+p_2}{2}, \frac{p_1+p_2}{2}, p_3, \cdots, p_n\right)\right)$$ となる.

$\therefore$ p_i が全て同じ値のとき. $S(p)$ は最大になり.

$$S\left(\left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)\right) = n \cdot -\frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log n$$ となる //