集合論の基礎

定義1.1. ものの集まりを集合といい，その個々の「もの」を集合の元あるいは要素という．xが集合Xの元であることを$x \in X$とかく

例.(1) 整数全体の集合を$\mathbb{Z}$で表す．このとき，

$1 \in \mathbb{Z}$， $\mathbb{Z} \ni -3$， $\mathbb{Z} \not\ni \frac{1}{2}$ などとかける．

(2). $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ もよく使う．

(3) 日本人男性の集合をXとすると，

大野$\in X$などとできる．

(4). 集合の表し方はいろいろあるが，$\{\quad\}$がよく用いられる

例えば．偶数全体の集合は．

$\{0, \pm 2, \pm 4, \cdots\} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$ とかける．

(5). 元をもたない集合を空集合といい，ϕで表す．

定義1.2. 集合Xの全ての元が集合Yに含まれるとき，

XはYに含まれるといい，$X \subset Y$で表す．

また、集合X、Yの和、差、積、補集合を次で定義する。

ただし、Ωを全体集合とする。

$X \cup Y = \{x \mid x \in X$ または $x \in Y\}$

$X \setminus Y = \{x \mid x \in X, x \notin Y\}$

$X \cap Y = \{x \mid x \in X, x \in Y\}$

$X^c = \{x \mid x \notin X\}$

例、ラッセルのパラドックス

Xを自分自身を要素として含まない集合を全て集めた集合

すなわち、 $X = \{Y:$ 集合 $\mid Y \notin Y\}$ とする。

XがXに含まれるか考えると

$X \in X \Rightarrow X \notin X$ となり矛盾

$X \notin X \Rightarrow X \in X$ となり矛盾。

$\rightsquigarrow$ このような集合は考えられない。

例 (1) $X=\{1.2.3\}$, $Y=\{2.4.6\}$ なら.

$X\cup Y=\{1.2.3.4.6\}$, $X\setminus Y=\{1.3\}$

$X\cap Y=\{2\}$ である.

X^c は Ω がないとわからない.

(2) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ は無理数.

(3) 集合 X に対し. 2^X で X の部分集合の集合を表す.

すなわち.

$2^X=\{Y \mid Y\subset X\}$ である.

$X=\{1.2.3\}$ なら.

$$2^X=\left\{\begin{array}{l}\phi,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1.2\},\ \{2.3\} \\ \{1.3\},\ \{1.2.3\}\end{array}\right\}$$ となる.

X の部分集合は. 1.2.3 の各元が入るか入らないかで決まるので.

2^3 個ある. このことから. 2^X とかかれる.

定義1.3 集合 X, Y に対し、直積を

$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ で定義する。

定義1.4 集合 X の各元に、集合 Y の元がただ1つ対応しているとき、この対応を X から Y への写像といい、

$$\begin{array}{cccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

とかく。ここで X を定義域、Y または $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を値域という。

例. (1) $\mathbb{R}$ 上の関数

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

などは写像である。

(2) 大学生の集合を X、大学の集合を Y とする。

$f: X \to Y$ を通っている大学を対応させるものとすると、これは写像になる。この逆 $g: Y \to X$ は写像にならない。

(3) たし算やかけ算、微分なども写像である。

$$\begin{array}{cccc} + : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x, y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

とできる。

<u>定義1.5</u> $f : X \to Y$ が次をみたすとき、単射、全射という。

単射：$x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

全射：${}^\forall y \in Y$, ${}^\exists x \in X$ s.t. $f(x) = y$.

全射かつ単射のとき全単射という

<u>例</u> (1)
$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
は全射でも単射でもない。

(2)
$$\begin{array}{cccc} + : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (x, y) & \mapsto & x+y \end{array}$$
は全射だが単射ではない

(3)
$$\begin{array}{cccc} id_X : & X & \longrightarrow & X \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$
は全単射。このような写像を恒等写像という。

定義1.6. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ のとき

$$g \circ f : X \longrightarrow Z \qquad \text{を } f \text{ と } g \text{ の合成という.}$$
$$x \longmapsto g(f(x))$$

また. $f : X \to Y$ が全単射のとき, その逆写像

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X \quad \text{が定義できる}$$
$$f(x) \longmapsto x$$

同値関係

定義1.7. 集合 X に対し. $X \times X$ の部分集合 R を二項関係

といい. $(x, y) \in R$ のとき $x \sim y$ とかく.

この $\sim$ が次をみたすとき. 同値関係といい. $x \sim y$ となる

x. y は同値であるという.

$\forall x, y, z \in X$ に対し.

(1) $x \sim x$ (2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

(3) $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

例1. $\mathbb{Z}$において.

$x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x-y \in 3\mathbb{Z}$ とおくと.これは同値関係.

$\because$ (1) $x-x=0\in 3\mathbb{Z}$ より $x\sim x$

(2) $x-y\in 3\mathbb{Z}$ より $y-x=-(x-y)\in 3\mathbb{Z}$

$\therefore y\sim x$.

(3) $x-y,\ y-z\in 3\mathbb{Z}$ より

$x-z=(x-y)+(y-z)\in 3\mathbb{Z}$ $\therefore x\sim z$. //

なお. $x=3a+t,\ y=3b+s$ $(a,b\in\mathbb{Z},\ t.s=0.1.2)$

とすると. $x\sim y$ となる条件は.

$x-y=3a+t-(3b+s)=3(a-b)+t-s\in 3\mathbb{Z}$ より

$t=s$ である. $\therefore$ 3でわった余りが等しいとき同値になる.

注 この同値関係は3を $n\in\mathbb{N}$ にかえても成り立つ.

例2 等号 $=$ も同値関係

例3. $\mathbb{R}$ において、$<$, $\leq$ を考えると.

$<$ は (1), (2) をみたさず　(3) はみたす.

$\leq$ は (2) をみたさない　(1), (3) はみたす.

定義1.8. 集合 X に同値関係 $\sim$ が入っているとする.

このとき $\forall x \in X$ に対し.

$[x] = \{ y \in X \mid x \sim y \}$ を x の同値類という.

また. x を $[x]$ の代表元という.

例1. $\mathbb{Z}$ に $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 3\mathbb{Z}$ で $\sim$ を入れると.

$[0] = \{0, \pm 3, \pm 6, \cdots\} = 3\mathbb{Z}$.

$[1] = \{1, 1\pm 3, 1\pm 6, \cdots\} = 3\mathbb{Z}+1$.

$[2] = \{2, 2\pm 3, 2\pm 6, \cdots\} = 3\mathbb{Z}+2$　とできる.

ここで. $[1] = [4] = [7]$ より 代表元は 1でも4でも7でもよい.

また. $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2]$ をみたすことにも注意.

例12. 等号を考えると

$[x] = \{x\}$ となる.

命題1.9. $(X, \sim)$ を考える. ${}^\forall x, y \in X$ に対し 次が成立

(1) $[x] \ni x$.

(2) $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$

(3) $x \nsim y \Rightarrow [x] \cap [y] = \phi$

$\because$ (1). $x \sim x$ より $[x] \ni x$.

(2) $\Leftarrow$ $x \in [x] = [y]$ より $x \sim y$.

$\Rightarrow$ $[x] \ni {}^\forall z$ に対し. $x \sim z$ でありかつ $x \sim y$ より

$y \sim z$ $\therefore z \in [y]$. $\therefore [x] \subset [y]$

逆もわかるので $[x] = [y]$

(3) $\underset{\ni z}{[x] \cap [y] \neq \phi}$ とすると $x \sim z$. $y \sim z$ より $x \sim y$

$\therefore$ 矛盾. //

定理1.10. $(X, \sim)$ は.

$X = \bigcup_{x \in X} [x]$ とできる. さらに

$\exists Y \subset X$ s.t. $x, y \in Y$, $x \neq y \Rightarrow x \not\sim y$ かつ

$$X = \bigcup_{y \in Y} [y] \quad - \text{※}$$ とできる.

∵ 命題1.9から出るが. Yの存在にはZornの補題がいる. //

※をXの類別という

濃度. 集合の元の個数を考える.

定義1.11. Ωを集合を集めた集合とし. $X, Y \in \Omega$に対し.

$X \sim Y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists f : X \to Y$: 全単射 とすると.

これは同値関係になる

(∵ 全単射の合成 逆写像が全単射なので)

$X \in \Omega$が $\{1, 2, \cdots, n\}$ と同値なとき.

Xの濃度はnであるといい, $|X| = n$ とかく.

また有限濃度であるという.

$X \sim \mathbb{N}$ のとき可算無限濃度といい. $|X| = \aleph_0$ とかく.

これら以外のときは非可算無限濃度という

例 (1) $X = \{a, b, \cdots, z\}$ とすると $|X| = 26$

(2) $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ である.

∵ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を次で定める.

$$f(n) = \begin{cases} 0 & (n = 1) \\ \dfrac{n}{2} & (n \geq 2.\ \text{even}) \\ -\dfrac{n-1}{2} & (n \geq 3,\ \text{odd}) \end{cases}$$

これは全単射である

(3) $\mathbb{R}$ は非可算

∵ $[0, 1]$ が非可算を示す.

$|[0, 1]| = \aleph_0$ と仮定し.

$f : \mathbb{N} \to [0, 1]$ を全単射とする このとき,

$f(1) = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$

$f(2) = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$ としていく.

ここで b_i を $a_{ii} \neq b_i$ をみたす1ケタの数とし.

$b = 0.b_1b_2b_3\cdots$ とする.

このとき. $b_i \neq a_{ii}$ より. $b \neq f(i)$ である.

∴ f が全射に矛盾する //.

なお $|\mathbb{R}| = \aleph$ とかき. 連続濃度という.