確率・統計　解答例

1. $P(A) = \dfrac{{}_3C_1 \times ({}_2C_0 + {}_2C_1)}{3^3} = \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3}$　$P(B) = \dfrac{1}{3}$ もわかる.

$P(A \cap B) = \dfrac{{}_3C_1}{3^3} = \dfrac{3}{27} = \dfrac{1}{9}$

$\therefore P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$　$\therefore$ AとBは独立である.

2. $\dfrac{0.35 \times 0.08}{0.35 \times 0.08 + 0.4 \times 0.05 + 0.25 \times 0.03}$

$= \dfrac{280}{280 + 200 + 75} = \dfrac{280}{555} = \dfrac{56}{111}$

3. (1) X の確率分布は

X	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

より

$E(X) = \dfrac{1}{6} \cdot 1 + \dfrac{1}{6} \cdot 2 + \cdots + \dfrac{1}{6} \cdot 6 = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = \dfrac{7}{2}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{1}{6} 1^2 + \cdots + \dfrac{1}{6} 6^2 - \left(\dfrac{7}{2}\right)^2$

$= \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 - \dfrac{49}{4} = \dfrac{91}{6} - \dfrac{49}{4} = \dfrac{182 - 147}{12} = \dfrac{35}{12}$, $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{35}{12}}$

(2) $\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{35}{12} \leqq \dfrac{1}{5}$ より　$n \geqq \dfrac{35}{12} \times 5 \fallingdotseq 14.\cdots$

$\therefore$ n は 15 以上であればよい

4. $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx = 2\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$

$=2\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2}$

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$

$=2\int_0^{\infty}x^2e^{-2x}dx-\frac{1}{4}=\left[-x^2e^{-2x}\right]_0^{\infty}+2\int_0^{\infty}xe^{-2x}dx-\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$\sigma(X)=\frac{1}{2}$

5. サイコロ100回振ったときの表の回数 X は $B(100, \frac{1}{2})$ に従う

Y を $N(50, 25)$ に従うとすれば、

$Z=\frac{Y-50}{5}$ は $N(0,1)$ に従う。

$\therefore P(X\geq 60)=P(Y\geq 59.5)=P\left(Z\geq\frac{59.5-50}{5}\right)$

$=P(Z\geq 1.9)=0.5-P(0\leq Z\leq 1.9)$

$=0.5-0.4713=0.0287$

6　X を $N\left(\mu, \frac{36}{400}\right)$ に従うとする.

$P(X-\xi \leq \mu \leq X+\xi) = 0.96$ となる ξ を求めると

$P(X-\xi \leq \mu \leq X+\xi) = P(\mu-\xi \leq X \leq \mu+\xi)$ ―☆

ここで $Y = \dfrac{X-\mu}{\frac{6}{20}} = \dfrac{10}{3}(X-\mu)$ は $N(0.1)$ に従い.

☆ $= P\left(-\frac{10}{3}\xi \leq Y \leq \frac{10}{3}\xi\right) = 0.96$

$\therefore\ P\left(0 \leq Y \leq \frac{10}{3}\xi\right) = 0.48$

$\therefore\ \frac{10}{3}\xi = 2.0537$

$\therefore\ \xi = 0.61611 \fallingdotseq 0.6$

$\therefore$ 96%信頼区間は $168.9 \leq \mu \leq 170.1$ である.

7　$H_0 : \mu = 2000$,　$H_1 : \mu < 2000$.

X を $N\left(2000, \frac{(120)^2}{100}\right) = N(2000, 12^2)$ に従うとすると.

$Z = \dfrac{X-2000}{12}$ は $N(0.1)$ に従う.

ここで. $P(Z < \xi) = 0.01$ となる ξ を求めると,

$P(0 \leq Z \leq -\xi) = 0.49$ より $\xi = -2.3263$.

今 Zの実現値は

$z = \frac{1}{12}(1960-2000) = -\frac{40}{12} = -\frac{10}{3} = -3.33$.

∴ 有意水準1%で H_0 は棄却される.