母分散の区間推定

n 個の標本 $(X_1, \cdots, X_n)$ はそれぞれ $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする.

ここで. μ の値を既知として. σ^2 を知りたい.

まず

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$ とすると. $$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V(X_i) = \sigma^2$$ をみたす

ここで

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$ は $\underbrace{\ }_{\text{自由度}n\text{の}}$ χ^2 分布に従う (定理 2.6.3)

$\because$. $Z_1, \cdots, Z_n$ を $N(0,1)$ に従うとすると 自由度 n の χ^2 分布は

$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$ であった.

上で. $Z_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$ とおくとこれは $N(0,1)$ に従い.

$(X_i - \mu)^2 = \sigma^2 \cdot Z_i^2$ となるので

$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum (X_i - \mu)^2 = \sum Z_i^2 = \chi^2$ となる.

例1 (P97.)

答. 98% 信頼区間を求めたいので.

$P(\xi_1 < \sigma^2 < \xi_2) = 0.98$ となる ξ_1, ξ_2 を求めたい.

正規分布のときは左右対称だったので.

$P(X-\delta \le \mu \le X+\delta) = 0.98$ の形で表せたが.

χ^2分布は非対称なので次のように考える.

$$\left.\begin{array}{l} P(\sigma^2 \le \xi_1) = 0.01 \\ P(\sigma^2 \ge \xi_2) = 0.01 \end{array}\right\}$$ となる ξ_1, ξ_2 を探す.

ここで $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2$ だったので.

$$P(\sigma^2 \le \xi_1) = P\left(\frac{1}{\chi^2}\sum(x_i-\mu)^2 \le \xi_1\right)$$
$$= P\left(\frac{1}{\xi_1}\sum(x_i-\mu)^2 \le \chi^2\right) = 0.01$$ とできる.

ここで χ^2分布表から

$\frac{1}{\xi_1}\sum(x_i-\mu)^2 = 23.2$ を得る.

x_i, μ に与えられた数を代入して計算すると.

$\xi_1 \fallingdotseq (0.016)^2$ となる. 同様に

$\xi_2 \fallingdotseq (0.047)^2$ となり. 98%信頼区間は.

$(0.016)^2 \le \sigma^2 \le (0.047)^2$ である.