母比率の区間推定

母集団において.ある条件 C をみたす比率(割合)を p とする.

また.大きさ n の標本で.X を C をみたす標本の数とし.

$\overline{X} = \frac{1}{n} X$ とする (Cをみたす比率)

一人だけ調べたときの期待値と分散は.(これを Y とすると)

$E(Y) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$

$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 = p(1-p)$ より

$E(\overline{X}) = p$, $V(\overline{X}) = \frac{1}{n} \cdot p(1-p)$ である.これより.nが十分大きければ.

$\overline{X}$ はほぼ. $N(p, \frac{p(1-p)}{n})$ に従う.

例10 $P(\overline{X} - \delta \leqq p \leqq \overline{X} + \delta) = 0.95$ となる δ を求めればよい.変形すると.

$P(p - \delta \leqq \overline{X} \leqq p + \delta) = 0.95$.

ここで $Z = \dfrac{\overline{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}(\overline{X} - p)$ とおくと.$N(0.1)$に従い.

$P(p - \delta \leqq \overline{X} \leqq p + \delta) = P\left(-\sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}} \cdot \delta \leqq Z \leqq \sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}\, \delta\right)$

$= 2 \cdot P\left(0 \leqq Z \leqq \sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}\, \delta\right) = 0.95$ より

$P\left(0 \leqq Z \leqq \sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}\, \delta\right) = 0.475$ となり. $\sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}} \cdot \delta = 1.96$ になる.

ここで. $p = 0.37$, $n = 100$ とすれば.

$\delta = \dfrac{\sqrt{0.37(1-0.37)}}{\sqrt{100}} \cdot 1.96 \fallingdotseq 0.095$ となり.

95%信頼区間は. $0.275 \leqq p \leqq 0.465$ である.

問 [1] $P(\bar{X}-\delta \leqq p \leqq \bar{X}+\delta) = 0.99$ より

$P(p-\delta \leqq \bar{X} \leqq p+\delta) = 0.99$ となる δ を求める.

$Z = \dfrac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = \sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}(\bar{X}-p)$ とすれば, $N(0.1)$ に従い.

$P(p-\delta \leqq \bar{X} \leqq p+\delta) = P\left(-\sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}\delta \leqq Z \leqq \sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}\delta\right)$

$= 2 \cdot P\left(0 \leqq Z \leqq \sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}\delta\right) = 0.99$.

$P\left(0 \leqq Z \leqq \sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}\delta\right) = 0.495$ となる. $\therefore \sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}\delta = 2.5758$.

ここで $p=0.36$, $n=10000$ とすると. $\delta \fallingdotseq 0.012$ となり.

99%信頼区間は. $0.348 < p < 0.372$ となる.

[2] 上記と全く同じ計算から.

$P\left(0 \leqq Z \leqq \sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}\delta\right) = 0.495$, $\sqrt{\dfrac{n}{p(1-p)}}\delta = 2.5758$ となり.

ここに $p = \dfrac{11}{500}$, $n=500$ を代入すると. $\delta \fallingdotseq 0.017$ となり

99%信頼区間は. $0.005 < p < 0.039$ となる.