# 1
# 確率と確率分布

高校の確率から大学の確率へ．

## 1.1　確率

高校で学んだ確率は，根元事象の確率が全て同じという性質を仮定していたが，一般にはこのような仮定は成り立たない．そのため確率の定義をもう一度やり直す必要がある．

**1．高校で学んだ確率の復習**

さいころ投げやくじ引きのように，同じ条件のもとで繰り返すことのできる実験や観測を**試行**といい，試行の結果として起こる事柄を**事象**という．

たとえば，さいころ投げの試行においては，「奇数の目が出る」という事象 $A$ や，「2 以下の目が出る」という事象 $B$ などが考えられる．これらの事象は集合を用いて，

$$A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{1, 2\}$$

と表すことができる．正確には $A = \{$「1 の目が出る」，「3 の目が出る」，「5 の目が出る」$\}$ とすべきかもしれないが，簡単のため単に $A = \{1, 3, 5\}$ のように表すことにする．

一般に，起こりうる結果全体の集合 $\Omega$ で表される事象を**全事象**といい，全事象のただ 1 つの要素からなる部分集合で表される事象を**根元事象**という．根元

事象はそれ以上わけることができない事象である．また，事象 $A$ に属する根元事象の個数を $n(A)$ で表す．

さいころ投げの試行では，全事象は $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ であり，根元事象は $\{1\}$, $\{2\}, \ldots, \{6\}$ の 6 つである．また，$A = \{1, 3, 5\}$ のとき，$n(A) = 3$ である．

高校で学ぶ確率では，どの根元事象が起こることも同程度に期待される（**同様に確からしい**）ことを仮定し，事象 $A$ が起こる確率 $P(A)$ を

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

と定義した．そのため，確率を求めるためには，事象に含まれる根元事象の数，すなわち場合の数を求めることが必要であった．

ここで，高校で学んだ場合の数を求めるのに便利な性質を復習する．

**命題 1.** 異なる $n$ 個のものから $r$ 個とりだして 1 列に並べる**順列**の総数は

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

である．とくに，異なる $n$ 個のものを 1 列に並べる順列の総数は $n!$ である．

**命題 2.** 異なる $n$ 個のものから重複を許して $r$ 個とりだし，1 列に並べる**重複順列**の総数は $n^r$ である．

**命題 3.** 異なる $n$ 個のものから $r$ 個をとる**組合せ**の総数は

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

である．また，${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ が成り立つ．

**命題 4.** 多項式 $(a+b)^n$ の展開式について，**二項定理**

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^r b^{n-r}$$

が成り立つ．また，${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$ が成り立つ．

## 2. 事象と確率の定義

高校で学ぶ確率では，どの根元事象も同様に確からしいことが仮定されていたが，一般の試行では根元事象が同様に確からしくない場合もある．また，試行で得られる数値が距離や重さのような連続的な値をとる場合のように，とりうる値が無限に存在することもある．このような試行にも対応できるよう，確率を定義する必要があるが，まず事象について次のように定める．

1. ある試行において起こりうる結果全体の集合 $\Omega$ を全事象という．
2. 事象は $\Omega$ の部分集合で表される．事象は $A, B, \dots$ などとかく．
3. 和集合 $A \cup B$ を $A$ と $B$ の**和事象**という．和事象は $A$ と $B$ の少なくとも一方が起こる事象である．
4. 積集合 $A \cap B$ を $A$ と $B$ の**積事象**という．積事象は $A$ と $B$ の両方が起こる事象である．
5. $A$ の補集合 $A^c$ を $A$ の**余事象**という．$A$ の余事象は $A$ が起こらない事象である．
6. 差集合 $A \backslash B$ を $A$ と $B$ の**差事象**という．差事象は $A$ が起こるが $B$ は起こらない事象である．
7. 空集合 $\emptyset$ を**空事象**という．空事象は起こりえない事象である．
8. 事象 $A$ と $B$ の積事象が空事象であるとき，すなわち $A \cap B = \emptyset$ であるとき，$A$ と $B$ は互いに**排反**であるという．$A$ と $B$ が互いに排反であることは，$A$ と $B$ が同時には起こらないことを表す．
9. 事象 $A_1, A_2, \dots$ のどの 2 つも互いに排反であるとき，$A_1, A_2, \dots$ は互いに**排反**であるという．

このような事象に対し，確率を次で定義する．

**定義 5.** ある試行について，任意の事象 $A$ に対し実数 $P(A)$ が対応し，以下の 3 条件を満たすとき，$P(A)$ を $A$ が起こる確率という．また，$P$ を確率という．

(1) $0 \leqq P(A) \leqq 1$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) 事象 $A_1, A_2, \dots$ が互いに排反ならば

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$$

を満たす．とくに $A$ と $B$ が排反なら，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ である．

この定義から，直ちに次の性質が導かれる．

**命題 6.** 以下が成り立つ．

(1) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(2) $P(\emptyset) = 0$

(3) $A \subset B$ ならば $P(A) \leqq P(B)$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

**証明.** (1) $A$ と $A^c$ は排反であり，さらに $A \cup A^c = \Omega$ より，$1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$ となり，$P(A)$ を移項すれば与式を得る．

(2) $\Omega$ と $\emptyset$ は排反で，かつ $\Omega \cup \emptyset = \Omega$ より，$1 = P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset)$ より $P(\emptyset) = 0$ を得る．

(3) $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ であり，かつ $A \cap B$ と $A^c \cap B$ は排反である．さらに，$A \subset B$ より $A \cap B = A$ であることから，

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(A) + P(A^c \cap B) \geqq P(A)$$

となる．

(4) (3) の計算より，$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$ とできる．一方，$A \cup B$ が，$A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$ と互いに排反な事象の和事象でかけることから，

$$P(A \cup B) = P(A) \cup P(A^c \cap B)$$

とできる．この 2 つの式を組み合わせれば与式を得る． □

**例.** サイコロ投げにおいて，事象 $A$，$B$，$C$ を，それぞれ $A = \{2, 4, 6\}$，$B = \{4, 5, 6\}$，$C = \{1, 2\}$ とする．事象 $A \cap B$，$A \cup B$，$B^c$，$A \backslash C$，$A \cap B \cap C$ はそれぞれ

$$A \cap B = \{4, 6\}, \quad A \cup B = \{2, 4, 5, 6\},$$
$$B^c = \{1, 2, 3\}, \quad A \backslash C = \{4, 6\}, \quad A \cap B \cap C = \emptyset$$

である．またその起こる確率は

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{2}{3},$$
$$P(B^c) = \frac{1}{2}, \quad P(A \backslash C) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B \cap C) = 0$$

である．

**問.** サイコロ投げにおいて，事象 $A$，$B$，$C$ を，それぞれ $A = \{1, 3, 5\}$，$B = \{3, 6\}$ とするとき，事象 $A \cup B$，$A \cap B$，$B^c$，$A \backslash B$ と，その起こる確率をそれぞれ求めよ．

**問.** X さん，Y さん，Z さんの 3 人で 1 回じゃんけんをする．事象 $A$ を「X さんが勝つ」，$B$ を「Y さんが負ける」とするとき，事象 $A$，$A \cap B$，$B^c$，$A \cup B$，$A \backslash B$ の起こる確率をそれぞれ求めよ．

## 3. 条件付き確率と独立性

事象 $A$ と $B$ の間になんらかの関係がある場合，$A$ が起こったことによって $B$ の起こる確率が変わることがある．このように，事象 $A$ が起こるときに $B$ が起こる確率を考える．

全事象 $\Omega$ は

$$\Omega = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$$

と 4 つの互いに排反な事象の和事象でかける．この 4 つの事象のうち，$A$ が起こる事象は $A \cap B$ と $A \cap B^c$ の 2 つであり，さらにこの 2 つの和事象は $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$ である．また，この 2 つの事象のうち，$B$ が起こる事象は $A \cap B$ だけである．

以上から，事象 $A$ が起こるという条件の下で，事象 $B$ が起こる条件付き確率を次で定義する．

**定義 7.** $P(A) \neq 0$ である事象 $A$ と $B$ に対し，

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

を $A$ が起こるときに $B$ が起こる**条件付き確率**という．

この定義から直ちに次の定理が導かれる．

**定理 8.**（確率の乗法定理）事象 $A$ と $B$ に対し，

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

が成り立つ．

**証明.** 定義 7 において，両辺に $P(A)$ をかければよい． □

定理 8 の左辺は，事象 $A$ と $B$ が両方とも起こる確率である．一方で右辺では，$P(A)$ が事象 $A$ の起こる確率であり，$P(B|A)$ は事象 $A$ が起こったときに $B$ が起こる確率である．すなわち，左辺は $A$ と $B$ を同時に扱っているのに対して，右辺は先に $A$ 次に $B$ というように順番をつけて扱っていると理解することができる．

事象 $A$ と $B$ になんの関係もない場合，事象 $A$ と $B$ は互いに独立であるという．互いに独立の定義は次で与えられる．

**定義 9.** 事象 $A$ と $B$ に対し，

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立つとき，$A$ と $B$ は互いに独立という．

**命題 10.** 事象 $A$ と $B$ に対し，次の 3 つは同値である．

(1) $A$ と $B$ が互いに独立，すなわち $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

(2) $P(B|A) = P(B)$

(3) $P(A|B) = P(A)$

**証明．** 定理 8 より，$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$ であるから，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が，$P(B|A) = P(B)$ と同値であることがわかる．また，定理 8 の式の $A$ と $B$ を入れ替えれば，$P(B \cap A) = P(A|B)P(B)$ となり，(1) と (2) が同値であることもわかる．

命題 10(2) の式は，$A$ が起こるときに $B$ が起こる条件付き確率が，$B$ が起こる確率と一致することを表している．すなわち，事象 $A$ が起こっても事象 $B$ が起こる確率に影響を与えないことを表している．

**例題．** 3 本のあたりが入った 10 本のくじがあり，X さん，Y さんの順で 1 本ずつくじを引く．事象 $A$ を「X さんがあたりを引く」，事象 $B$ を「Y さんがあたりを引く」とするとき，次の問に答えよ．

(1) X さんがくじを戻すとき，事象 $A$ と $B$ が互いに独立か調べよ．

(2) X さんがくじを戻さないとき，事象 $A$ と $B$ が互いに独立か調べよ．

**解．** (1) くじを戻すとき，$P(A) = P(B) = 3/10$，$P(A \cap B) = 9/100$ より，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ となるので独立である．

(2) くじを戻さないとき，$P(A) = P(B) = 3/10$，$P(A \cap B) = 1/15$ より，$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ である．よって独立ではない．

**問．** 赤玉が 15 個，白玉が 10 個入った箱の中から，X さん Y さんが順番にそれぞれ 1 個ずつ玉をとる．事象 $A$ を「X さんが赤玉をとる」，事象 $B$ を「Y さんが白玉をとる」とするとき，$P(A)$，$P(B)$，$P(B|A)$，$P(A|B)$ を求め，事象 $A$ と $B$ が互いに独立であるか答えよ．ただし，X さんがとった玉は箱に戻さないとする．

**問．** 52 枚のトランプから 1 枚のカードを引く．事象 $A$ を「ハートを引く」，事象 $B$ を「エースを引く」，事象 $C$ を「スペードを引く」とするとき，$P(A)$，$P(A|B)$，$P(A|C)$ をそれぞれ求めよ．また，事象 $A$ と $B$，事象 $A$ と $C$ が互いに独立であるか答えよ．

**問.** X さん，Y さん，Z さんの 3 人で 1 回じゃんけんをする．事象 $A$ を「X さんが勝つ」，$B$ を「Y さんが勝つ」とするとき，事象 $A$ と $B$ が互いに独立であるか答えよ．

**4.　ベイズの定理**

ここでは確率で成り立つ 2 つの等式を紹介する．

**定理 11.** 事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が互いに排反で，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \supset B$ であるとき，

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

が成り立つ．とくに，事象 $A$ と $B$ について，

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$

が成り立つ．

**証明.** 事象 $B$ は $B = \cup_{i=1}^{n}(A_i \cap B)$ と互いに排反な $n$ 個の事象の和事象で書くことが出来る．さらに定理 8 を用いれば，

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

となる．とくに，$n = 2$，$A_1 = A$，$A_2 = A^c$ とすれば

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$

を得る．　□

**定理 12.**（ベイズの定理）事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が互いに排反で，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \supset B$ であるとき，任意の $1 \leqq k \leqq n$ に対し，

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

が成り立つ．

**証明.** まず，定理 8 より $P(A_k \cap B) = P(B|A_k)P(A_k)$ かつ $P(A_k \cap B) = P(A_k|B)P(B)$ となり，

$$P(A_k|B)P(B) = P(B|A_k)P(A_k)$$

を得る．ここで，$B$ は $B = \cup_{i=1}^{n}(A_n \cap B)$ と互いに排反な $n$ 個の事象の和事象

で書くことが出来るので，定理 8 を用いれば

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_n \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

となる．よって

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

を得る． □

ベイズの定理において，事象 $A_1, \ldots, A_n$ を事象 $B$ が起こる原因であるという見方をすると，実際に $B$ が起こったときに，その原因が $A_k$ である確率を与えるものになっている．

**例題.** W 社では，ある製品の部品を X 社，Y 社，Z 社の 3 つの会社から，それぞれ 20%，30%，50%の割合で仕入れていたが，この部品の不良率はそれぞれ 4%，3%，1%であった．さて，仕入れた部品の中から適当に一つ取り出したとき，それが不良品であった．この不良品が X 社のものである確率を求めよ．

**解.** 事象 $A$ を「取り出した部品が X 社のもの」，$B$ を「取り出した部品が Y 社のもの」，$C$ を「取り出した部品が Z 社のもの」とする．また，事象 $D$ を「取り出した部品が不良品」とする．このとき，求める確率は $P(A|D)$ なので，ベイズの定理より，

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)} \\ &= \frac{0.04 \times 0.2}{0.04 \times 0.2 + 0.03 \times 0.3 + 0.01 \times 0.5} = \frac{4}{11} \end{aligned}$$

となる．

**問.** W 社では，ある製品の部品を X 社，Y 社，Z 社の 3 つの会社から，それぞれ 30%，30%，40%の割合で仕入れていたが，この部品の不良率はそれぞれ 2%，3%，2%であった．さて，仕入れた部品の中から適当に一つ取り出したとき，それが不良品であった．この不良品が X 社のものである確率を求めよ．

**問.** あるサッカーチームの 1 点差以内の試合での勝率は 70%，2 点差以上の試合での勝率は 50%だった．また，1 点差以内の試合の割合は 60%だった．このチームの勝ち試合のうち 1 点差以内の試合の割合を求めよ．