

## 応用数学II 平成31年度後期 期末試験

注意：解答の順番は問わないが、どの問題の解答か分かるように書くこと。  
また、解答の書き方により、記載の配点とは別に、最大で10点の加点をすることがある。

1. 周期  $2\pi$  をもち、区間  $(-\pi, \pi]$  において

$$f(x) = x$$

で与えられる関数について、次の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  のフーリエ級数を求めよ。(15点)  
(2)  $f(x)$  にパーセバルの等式を用いることで、次の等式を示せ。(5点)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2. 関数  $f(x)$  が

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

で定義されるとき、 $f(x)$  のフーリエ余弦変換を求めよ。ただし、 $a > 0$  であり、フーリエ余弦変換は

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut dt$$

で定義される。(15点)

3. 次の関数のフーリエ変換を求めよ。(15点)

$$f(x) = \begin{cases} |x| & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

4. ベクトル  $\mathbf{a} = (1, 3, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 1, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (3, 0, 3)$  について、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  と  $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$  を求めよ。(10点)

5. 曲線  $C: \mathbf{r}(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t)$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $\mathbf{r}(0)$  から  $\mathbf{r}(t)$  までの弧長  $s(t)$  を求め、 $\mathbf{r}(t)$  を弧長パラメータ表示せよ。(5点)  
(2) フレネ標構  $\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)$ , および曲率  $\kappa(s)$ , 捩率  $\tau(s)$  を求めよ。(15点)

6. 原点を中心とする単位球面は

$$\mathbf{r}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \quad (0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

と表される。この球面の表面積  $S$  を求めよ。ただし、中学で習った球面の表面積を求める公式を使ってはいけない。(10点)

7. 次のスカラー場の、点  $(0, \pi, 2)$  における勾配を求めよ。(10点)

$$f(x, y, z) = e^x \sin y - z^2 \cos y$$