§4.3.2. ベクトル場の発散と回転

$\nabla = (\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ と考えてみる.

スカラー場 f に対しては

$\nabla f = (\nabla_1 f, \nabla_2 f, \nabla_3 f)$ となっている.

さらにベクトル場 $a = (a_1, a_2, a_3)$ に対して.

$\nabla \cdot a = \nabla_1 a_1 + \nabla_2 a_2 + \nabla_3 a_3$ を a の発散といい. $\mathrm{div}\, a$ で表し.

$\nabla \times a = (\nabla_2 a_3 - \nabla_3 a_2, \nabla_3 a_1 - \nabla_1 a_3, \nabla_1 a_2 - \nabla_2 a_1)$

を a の回転といい. $\mathrm{rot}\, a$ で表す.

例題 4.3.3. スカラー場 f, g とベクトル場 a, b に対し. 次が成立.

(1) $\nabla \cdot (a+b) = \nabla \cdot a + \nabla \cdot b$,

$\nabla \times (a+b) = \nabla \times a + \nabla \times b$.

(2) $\nabla \cdot (fa) = (\nabla f) \cdot a + f(\nabla \cdot a)$

$\nabla \times (fa) = (\nabla f) \times a + f(\nabla \times a)$

(∵) (1)の第1式

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (a+b) &= (\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3) \cdot (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(a_1+b_1) + \frac{\partial}{\partial y}(a_2+b_2) + \frac{\partial}{\partial z}(a_3+b_3) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}a_1 + \frac{\partial}{\partial y}a_2 + \frac{\partial}{\partial z}a_3 + \frac{\partial}{\partial x}b_1 + \frac{\partial}{\partial y}b_2 + \frac{\partial}{\partial z}b_3 \\ &= \nabla \cdot a + \nabla \cdot b.\end{aligned}$$

である

(1)の第2式と(2)の第1式は同じようにできるので省略.

(2) の第2式. レビ・チビタの記号.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i.j.k)=(1.2.3),(2.3.1),(3.1.2) \\ -1 & (i.j.k)=(3.2.1),(2.1.3),(1.3.2) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$ を使う.

これを使うと. $a\times b$ の第 i 成分は

$$(a\times b)_i = \sum_{j.k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$$ で表せる.

例えば、$a\times b$ の第1成分は $a_2b_3 - a_3b_2$ であるが.

上式の右辺は. $i=1$ より. $j=2. k=3$ or $j=3, k=2$ のとき以外は0になる

$$\therefore \sum_{j.k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k = \varepsilon_{123}\, a_2b_3 + \varepsilon_{132}\, a_3b_2 = a_2b_3 - a_3b_2$$ となる.

これを使えば.

$$(\nabla\times(fa))_i = \sum_{j.k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,(\nabla_j\cdot(fa_k))$$

$$= \sum_{j.k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,((\nabla_j f)\cdot a_k + f\cdot\nabla_j a_k)$$

$$= ((\nabla f)\times a)_i + f\cdot(\nabla\times a)_i$$ となり. 結論を得る.

次の公式も成り立つ. (問2)

(1) $\nabla\cdot(a\times b) = (\nabla\times a)\cdot b - a\cdot(\nabla\times b)$

(2) $\nabla\times(a\times b) = (b\cdot\nabla)a - (a\cdot\nabla)b + a(\nabla\cdot b) - b(\nabla\cdot a)$

a が $\mathrm{div}\, a = 0$ となるとき. 湧き出しなし といい.

a が $\mathrm{rot}\, a = 0$ となるとき. 渦なし であるという.

例. 問4.3.2 $\boxed{2}$(2).

問. 4.3.2 $\boxed{2}$ (1), (3), (4).

場の2階微分.

$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ をラプラシアンとよぶ.

ラプラシアンは次の公式をみたす.

(1) $\nabla \cdot (\nabla f) = \Delta f$　(2) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(3) $\nabla \cdot (\nabla \times a) = 0$　(4) $\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \Delta a$.

流線. ベクトル場 a に対し.

$\dot{r}(t) = a(r(t))$ をみたす曲線を a の流線という.

例 問4.3.1. $\boxed{3}$.

$r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ とおくと.

$\dot{r}(t) = (\dot{r}_1(t), \dot{r}_2(t), \dot{r}_3(t))$ と

$v(r(t)) = (r_1(t), r_2(t), 0)$ より

$\dot{r}_1(t) = r_1(t)$, $\dot{r}_2(t) = r_2(t)$, $\dot{r}_3(t) = 0$ となり

$r(t) = (c_1 e^t, c_2 e^t, c_3)$ となる.

問4.3.1 $\boxed{6}$