応用数学I

1. (1) $y' = -\frac{y+1}{x}$, $\frac{y'}{y+1} = -\frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{y+1} dy = -\int \frac{1}{x} dx.$$

$$\log(y+1) = -\log x + C.$$

$$y+1 = e^{C} \cdot \frac{1}{x} = C \cdot \frac{1}{x} \qquad (e^{C} \to C)$$

(2) $y' = \frac{y^2 - x^2}{xy} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{\frac{y}{x}}$ 　$\frac{y}{x} = v$ とすれば.

$y' = v + xv'$ より

$$xv' = \frac{v^2-1}{v} - v = -\frac{1}{v}$$

$-vv' = \frac{1}{x}$ 　　$\int -v\,dv = \int \frac{1}{x} dx$

$$-\frac{1}{2}v^2 = \log x + C.$$

$-\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} = \log x + C$ 　　$-\frac{1}{2}y^2 = x^2(\log x + C)$

(3) $\frac{d}{dy}(2x + e^y) = e^y$, $\frac{d}{dx} xe^y = e^y$ よりこれは完全.

$u = \int 2x + e^y\,dx = x^2 + xe^y + v(y)$ 　より

$v_y = xe^y + v'(y) = xe^y$ $\therefore v'(y)=0$ $v(y)=0$

$\therefore u = x^2 + xe^y = C$

2. $z = y^{-5}$, $y = z^{-\frac{1}{5}}$ とすると、$y' = -\frac{1}{5} z^{-\frac{6}{5}} z'$ より

$x\left(-\frac{1}{5} z^{-\frac{6}{5}} z'\right) + z^{-\frac{1}{5}} = x^3 y^{-\frac{6}{5}}$

$xz' - 5z = -5x^3$ となる。ここで $xz' - 5z = 0$ を解くと

$\int \frac{1}{z} dz = \int \frac{5}{x} dx$ より $\log z = 5\log x + C$

$\therefore z = e^C \cdot x^5 = C \cdot x^5$ $(e^C \to C)$

C を $v(x)$ でおきかえて ~~与~~式に代入すると。

$x(v'x^5 + 5vx^4) - 5vx^5 = -5x^3$

$v' = -5x^{-3}$ $\therefore v = \frac{5}{2}x^{-2} + C$

$\therefore z = \left(\frac{5}{2}x^{-2} + C\right) \cdot x^5$

$y^{-5} = \frac{5}{2}x^3 + Cx^5$

3 $\lambda^2-4=0$ をとくと $\lambda=\pm 2$ $\therefore$ e^{2x}, e^{-2x} が基本解.

推測特殊解を $y=ae^{3x}+b\sin x+c\cos x$ とすると.

$y''=9ae^{3x}-b\sin x-c\cos x$ より

$9ae^{3x}-b\sin x-c\cdot\cos x-4ae^{3x}-4b\sin x-4c\cos x$
$=2e^{3x}+\sin x$

$\therefore$ $5a=2$, $-5b=1$, $-5c=0$.

$\therefore$ 一般解は $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+\frac{2}{5}e^{3x}-\frac{1}{5}\sin x$.

4. $\cos t * t=\int_0^t \cos(t-u)\cdot u\,du$

$=\left[-\sin(t-u)\cdot u\right]_0^t+\int_0^t \sin(t-u)\,du=\left[\cos(t-u)\right]_0^t$

$=1-\cos t$.

また $L(\cos t * t)=L(\cos t)\cdot L(t)=\frac{s}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{s(s^2+1)}$

5. ラプラス変換すると.

$s^2F(s)-2-6sF(s)+9F(s)=0$

$\therefore$ $F(s)=\frac{2}{(s-3)^2}$ $\therefore$ $f(t)=2t\cdot e^{3t}$ である.

6. $f'(0)=a$としてラプラス変換すると.

$$s^2F(s)-a+2sF(s)+2F(s)=\frac{1}{s}$$

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+2)}+\frac{a}{s^2+2s+2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+2}{s^2+2s+2}\right)+\frac{a}{s^2+2s+2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{s+1}{(s+1)^2+1}+\frac{a-\frac{1}{2}}{(s+1)^2+1}$$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x}\cos x+\left(a-\frac{1}{2}\right)e^{-x}\sin x.$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$ より $\quad \frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\left(a-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{\pi}{2}}\cdot 1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$, $\quad f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x}\cos x$