3 1階線形微分方程式.

$P(x)$, $Q(x)$ を x の関数とするとき.

$y' + P(x)y = Q(x)$ …☆

の形の微分方程式を (1階)線形微分方程式 という.

定理 1.2.1. ☆の解は

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$ である

∵ ☆に解があると仮定して.それを. y とし.

$Z = e^{\int P(x)dx} \cdot y$ とおく.

これを両辺で微分すると.

$$Z' = e^{\int P(x)dx} \cdot y' + P(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot y$$

$$= e^{\int P(x)dx} (y' + P(x)y) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$$ となる

$\therefore Z = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C$ となり

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$ となる. //

一方. ラグランジュの定数変化法 で求めることもできる.

まず ☆の式で $Q(x) = 0$ として.

$y' + P(x)y = 0$ を解く.

これは変数分離形なので.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -P(x)$$

$\log y = -\int P(x)dx + C$

$y = c \cdot e^{-\int P(x)dx}$ 　　$(e^c \to c)$ 　となる.

ここで. Cを xの関数 $v(x)$ におきかえて.

$y = v \cdot e^{-\int P(x)dx}$ が ✲の解となる vを求める.

上のyを✲に代入すると.

$v' \cdot e^{-\int P(x)dx} - \int P(x)dx \cdot v \cdot e^{-\int P(x)dx} + P(x) \cdot v \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$

$v' = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$ となり

$v = \int Q(x) e^{\int P(x)} dx + C$

$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$ 　を得る.

<u>例題</u> 　$xy' + y = \sin x$ 　を解け.

答 まず. $xy' + y = 0$ を解くと.

$y' = -\frac{y}{x}$ 　より 　$y = C \frac{1}{x}$ となる. ここで $C = v(x)$ とおきかえ

もとの式に代入すれば.

$x\left(v' \cdot \frac{1}{x} + v \cdot \frac{-1}{x^2}\right) + v \cdot \frac{1}{x} = \sin x$ 　より

$v' = \sin x$, 　$v = -\cos x + C$ となる

$\therefore y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$ 　となる

問 (1) $y' - \frac{2y}{x} = x^2 \cos x$

(2) $y' + 2xy = x$

(3) $xy' - 2y = x^4 e^{-x^2}$

ベルヌーイの微分方程式

$$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^a \qquad (a \neq 0, 1)$$

を ベルヌーイの微分方程式 という.

ベルヌーイの微分方程式は $z = y^{1-a}$ で変数変換すると線形になる.

∵ $z' = (1-a)\cdot y' \cdot y^{-a}$ より

$y = z^{\frac{1}{1-a}}$, $y' = \frac{1}{1-a} z' \cdot y^{a} = \frac{1}{1-a} z' \cdot z^{\frac{a}{1-a}}$ となり

~~与~~式は

$$\frac{1}{1-a} z' \cdot z^{\frac{a}{1-a}} + P(x)\cdot z^{\frac{1}{1-a}} = Q(x) z^{\frac{a}{1-a}}$$

$$z' + (1-a)P(x)z = (1-a)Q(x) \qquad となる$$

//

例題. $xy' + y = x^3y^6$ を解け.

答. $z = y^{-5}$ とおくと. $z' = -5\cdot y' \cdot y^{-6}$ より

$$-\frac{1}{5}\cdot xz'y^6 + y = x^3y^6.$$

$xz' - 5z = -5x^3$ となる. ここで $xz' - 5z = 0$ を解けば

$z = c\cdot x^5$ となる. ここで $c = v(x)$ とし. 代入すれば.

$$x\cdot(5vx^4 + v'x^5) - 5vx^5 = -5x^3$$

$v' = -5x^{-3}$ $\quad v = \frac{5}{2}x^{-2} + C$ となる

$$\therefore z = \frac{5}{2}x^3 + c\cdot x^5$$

$y^{-5} = \frac{5}{2}x^3 + C\cdot x^5$ を得る.

問 (1) $y' + \frac{y}{x} = x^2y^3$

(2) $y' + 2y = 2xy^{\frac{3}{2}}$