解答 その4

$\boxed{1}$ $\ker f = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$.

$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解くと $\mathrm{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$ より

$x = t$ として. $y = -t$, $z = 0$.

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \therefore \ker f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$\therefore$ $\ker f$ の基底は $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\dim \ker f = 1$.

$\boxed{2}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解くと.

$\mathrm{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$ より $x = t$, $z = s$ として.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t-2s \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ より $\ker f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

ここで $\mathrm{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$ より

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が $\ker f$ の基底で $\dim \ker f = 2$.

3. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解くと.

$\mathrm{rank} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$ より. $x = t$ とすれば $y = z = -t$.

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad \therefore \ker f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\therefore \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ が $\ker f$ の基底で $\dim \ker f = 1$.

4. $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ここで

$a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすれば $\begin{cases} a - b = 4 \\ a + b = 1 \end{cases}$ より $\begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$

$$\therefore f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=[v_1\ \ v_2]\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

また $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1&3\\2&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

とすれば $\begin{cases}a-b=5\\a+b=4\end{cases}$ より $\begin{cases}a=\frac{9}{2}\\b=-\frac{1}{2}\end{cases}$ $\therefore f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=[v_1\ \ v_2]\begin{bmatrix}\frac{9}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

また $f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1&3\\2&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ とすると

$\begin{cases}a-b=4\\a+b=2\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=3\\b=-1.\end{cases}$ $\therefore f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)=[v_1\ v_2]\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$

$\therefore$ 求める表現行列は $\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&\frac{9}{2}&3\\-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix}$ である.

5. $f(v_1)=\begin{bmatrix}1&3\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ とすると

$\begin{cases}a+2b=6\\a=5\end{cases}$ より $\begin{cases}a=5\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$

$f(v_2)=\begin{bmatrix}1&3\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ とすると

$$\begin{cases} a+2b=11 \\ a=1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases} \quad \therefore 表現行列は \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}$$

6. $f(v_1)=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ より

$$\begin{cases} a-b=6 \\ a+b=-1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ b=-\frac{7}{2} \end{cases}$$

$f(v_2)=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ より

$$\begin{cases} a-b=8 \\ a+b=4 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a=6 \\ b=-2 \end{cases}$$

$f(v_3)=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ より

$$\begin{cases} a-b=5 \\ a+b=3 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a=4 \\ b=-1 \end{cases} \quad \therefore 表現行列は \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 6 & 4 \\ -\frac{7}{2} & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

7. (1) ${}^t\!\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} =$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 & 2\\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1\\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}$$ ∴直交行列

(2) $$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$ ∴直交行列.

(3) 行列をAとすると

$$^tAA=\frac{1}{50}\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ -3 & -4 & 5\\ 4\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\sqrt{2}\\ 4 & -4 & -3\sqrt{2}\\ 5 & 5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}$$

∴直交行列.

8. 行列をAとすると.

$$^tAA=\begin{bmatrix}a & a & a\\ -b & b & 0\\ -c & -c & 2c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & -b & -c\\ a & b & -c\\ a & 0 & 2c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a^2 & & 0\\ & 2b^2 & \\ 0 & & 6c^2\end{bmatrix}$$

∴ $a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $C=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ である.