

線形代数学II 令和元年度前期 期末試験問題

注意：解答の順番は問わないが，どの問題を解いているか分かるように書くこと．

- ・ 解答の書き方により，記載の配点とは別に，最大で10点の加点をすることがある．
- ・ 解答用紙には2枚とも記名し，2枚目を1枚目に挟んで提出すること．

1. 次の \mathbb{C}^3 のベクトルの組が基底であることを示せ．(15点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. \mathbb{C}^3 の基底

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

から，基本ベクトルのなす基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ への基底の変換行列 P を求めよ．(15点)

3. 次のベクトルの組から， \mathbb{C}^3 の正規直交基底を作れ．(15点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. 線形写像 $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき， $\ker f$ の次元を求めよ．(15点)

5. 次の行列 A が，対角化不可能であることを示せ．(10点)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. 次の行列 B を以下の順序で対角化せよ．(30点)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (1) 行列 B の固有値を求めよ．
- (2) 各固有値に属する固有空間を， $\langle v, w \rangle$ の形で表せ．
- (3) B が対角化可能である理由を述べよ．
- (4) B を対角化する行列 P を求め， $P^{-1}BP$ を計算せよ．(計算過程は書かなくても良い.)