線形代数学 解答

1. $\operatorname{rank}[v_1\ v_2\ v_3] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3$ ∴ v_1, v_2, v_3 は一次独立.

$\dim \mathbb{C}^3 = 3$ より v_1, v_2, v_3 は基底である.

2. $[e_1\ e_2\ e_3] = [v_1\ v_2\ v_3]P$ となる P を求める.

$[v_1, v_2, v_3]$ の逆行列は

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$ である ∴ $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3 $y_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{1}{2} v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$

$y_2' = v_2 - (y_1, v_2) y_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$

$y_2 = \dfrac{y_2'}{\|y_2'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_2' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$

$y_3' = v_3 - (y_1, v_3) y_1 - (y_2, v_3) y_2$

$= \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\3\\3\end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$

$y_3 = \dfrac{y_3'}{\|y_3'\|} = \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$

4. $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -7\end{bmatrix} = 2$ より

$z = t$ とすれば $y = 7t$, $x = -10t$.

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10t \\ 7t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \therefore \ker f = \left\langle \begin{bmatrix} -10 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\therefore \dim\ker f = 1$.

5. $$\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & 0 \\ -1 & t-2 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-1) - (t-1) = (t-1)^2(t-3)$$

$\therefore$ 固有値は 1 と 3.

今, $$\mathrm{rank}(E-A) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

$\therefore$ $3-2=1$ が重複度 2 と一致しないので対角化不可能

6. (1) $$\varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ -1 & t-1 & -1 \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix} = t^2(t-1) - 2t$$

$$= t(t^2-t-2) = t(t-2)(t+1).$$

$\therefore$ 固有値は 0, 2, −1.

(2) $(\lambda E - B)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解く. 固有値0について.

$$\mathrm{rank}\,B = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$ より.

$x = t$ とすれば. $y = 0$, $z = -t$.

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \therefore V(0) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

固有値2について、

$$2E - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より $z = t$ とすると $y = 2t$, $x = t$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore V(2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

固有値 -1 について.

$$-E-B=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-2&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

より $x=t$ とすれば, $y=-t,\ z=t$

$$\therefore\ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\-t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\qquad\therefore\ V(-1)=\left\langle\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\rangle.$$

(3) エルミート行列なので対角化可能.

(4). $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}$ で $P^{-1}BP=\begin{bmatrix}0&&0\\&2&\\0&&-1\end{bmatrix}$