§2.2. 線形写像の表現行列

$\{v_j\}_{j=1}^m$ をVの基底, $\{w_j\}_{j=1}^n$ をWの基底とする.

この基底を固定して考えるとき.

$f : V_{\{v_j\}} \longrightarrow W_{\{w_j\}}$ と表す.

$^\forall x \in V$ は $\{v_j\}$ を使って.

$$x = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j = [v_1 \cdots v_m] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

と成分表示できた これをfで写すと.

$f(x) = f(\sum \alpha_j v_j) = \sum \alpha_j f(v_j)$ となる

$\therefore f(x)$ は $f(v_j)$ で決まる. さらに.

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i = a_{1j} w_1 + \cdots + a_{nj} w_n = [w_1 \cdots w_n] \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

とすると. $f(x)$ は.

$$f(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j f(v_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \alpha_j \right) w_i = [w_1 \cdots w_n] \begin{bmatrix} \sum a_{1j} \alpha_j \\ \vdots \\ \sum a_{nj} \alpha_j \end{bmatrix}$$

$$= [w_1 \cdots w_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$ と表せる.

定義 2.6 $f : V_{\{v_j\}} \longrightarrow W_{\{w_j\}}$ とする.

$\forall x = [v_1 \cdots v_m] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \in V$ に対し

$f(x) = [w_1 \cdots w_n] A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$ とできるAを、fの表現行列という.

ここで $f(v_j) = [w_1 \cdots w_n] \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ であるとき $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ がAの第j列である.

例④, 問⑤.⑥.

命題 2.7

(1) $1_V : V\{v_j\} \longrightarrow V\{v_j\}$ の表現行列は E_m

(2) $1_V : V\{v_j\} \longrightarrow V\{v_j\}$ の表現行列は

$\{v_j\}$ から $\{v_j\}$ への基底の変換行列 P

(3)

$$\begin{tikzcd} & 1_V & & 1_V \\ f : & V\{v_j\} \arrow[rr, "A"] \arrow[d, "P"'] & & W\{w_j\} \arrow[d, "Q"] \\ f : & V\{v_j'\} \arrow[rr, "B"] & & W\{w_j'\} \end{tikzcd}$$

とする. ただし. $A.B.P.Q$ は表現行列

このとき. $QA=BP$. が成立. とくに

$$\begin{tikzcd} f : & V\{v_j\} \arrow[rr, "A"] \arrow[d, "P"'] & & V\{v_j'\} \arrow[d, "P"] \\ & V\{v_j'\} \arrow[rr, "B"] & & V\{v_j'\} \end{tikzcd}$$

のとき. $A=P^{-1}BP$ である

∵ (1) $1_V\left([v_1 \cdots v_m]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{bmatrix}\right) = [v_1 \cdots v_m]E_m\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{bmatrix}$ よりわかる

(2) $1_V\left([v_1 \cdots v_m]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{bmatrix}\right) = [v_1 \cdots v_m]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{bmatrix}$

$= [v_1' \cdots v_m'] \cdot P\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{bmatrix}$ よりわかる.

(3) $f\left([v_1 \cdots v_m]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{bmatrix}\right) = [w_1 \cdots w_n]A\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{bmatrix}$

$= [w_1' \cdots w_n']QA\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{bmatrix}$ となる 一方

$$f\left([v_1 \cdots v_m]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{bmatrix}\right) = f\left([v_1' \cdots v_m']P\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{bmatrix}\right)$$

$$= f\left([v_1' \cdots v_m']BP\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_m\end{bmatrix}\right) \qquad \therefore QA = BP.$$

とくに $Q=P$ なら $A = P^{-1}BP$ //

例. $\frac{d}{dx} : \langle 1, x, x^2 \rangle \longrightarrow \langle 1, x, x^2 \rangle$ の表現行列を考える.

$$\frac{d}{dx}1 = 0 = [1 \ x \ x^2]\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}x = 1 = [1 \ x \ x^2]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x = [1 \ x \ x^2]\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$$

∴表現行列は. $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}$

これを使うと. 例えば $2x^2+3 = [1 \ x \ x^2]\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}$ は.

$$\frac{d}{dx}(2x^2+3) = \frac{d}{dx}\left([1 \ x \ x^2]\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}\right) = [1 \ x \ x^2]\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$= [1 \ x \ x^2]\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix} = 4x$$ となる.