§1.5 成分表示と基底の変換行列

<u>定義 1.22</u>. $v_1, \cdots, v_n \in V$ を V の基底とすると $\forall x \in V$ は

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ と表せる.

この表し方は1通りであり. — ☆

この. $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ を $v_1, \cdots, v_n$ に関する x の成分表示という.

(☆の証明).

$x = \sum x_i v_i = \sum y_i v_i$ とできたとすると.

$\sum (x_i - y_i) v_i = 0$. $v_1, \cdots, v_n$ が1次独立なので

$x_i - y_i = 0 \quad \forall i \qquad \therefore x_i = y_i \ (\forall i)$ //

ここで $x = [v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y = [v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し.

$x + y = [v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$, $\alpha x = [v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$ となり.

$x \in V$ を $x \in \mathbb{C}^n$ であるかのように扱える

例. $V = \langle 1, x, x^2 \rangle = \{ \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \mid \alpha_i \in \mathbb{C} \}$
：2次式全体

において. $3x^2+2$ を成分表示すると

$$3x^2+2 = [1 \ \ x \ \ x^2] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$ である.

→ 2次式が $\mathbb{C}^3$ のベクトルのように表せる.

例 $\boxed{1}$ (1)　問題 $\boxed{1}$ (2), (3) $\boxed{2}$

基底の変換行列

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ と $\{u_1, \cdots, u_n\}$ を V の基底とすると.

$\{v_i\}$, $\{u_i\}$ と略記

$$u_1 = p_{11} v_1 + p_{21} v_2 + \cdots + p_{n1} v_n$$

$$u_2 = p_{12} v_1 + p_{22} v_2 + \cdots + p_{n2} v_n$$

$\vdots$

$$u_n = p_{1n} v_1 + p_{2n} v_2 + \cdots + p_{nn} v_n$$ とできる. これを行列で.

$$[u_1 \cdots u_n] = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}}_{=: P \text{とする}} \quad - \circledast$$ と表せる

定義1.23

☆をみたす P を $\{v_i\}$ から $\{u_i\}$ への基底の変換行列という

これを $P:\{v_i\}\mapsto\{u_i\}$ と略記する

定理1.24

(1) $\{v_i\}$ から $\{v_i\}$ への基底の変換行列は単位行列 E

(2) $P:\{v_i\}\mapsto\{u_i\}$, $Q:\{w_i\}\mapsto\{v_i\}$, $R:\{w_i\}\to\{u_i\}$

とすると $R=QP$

(3) $P:\{v_i\}\mapsto\{u_i\}$, $Q:\{u_i\}\mapsto\{v_i\}$ のとき $Q=P^{-1}$

とくに基底の変換行列は正則

$\because$ (1) $[v_1 \cdots v_n]=[v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}$ よりわかる

(2) $[u_1 \cdots u_n]=[v_1 \cdots v_n]P=[w_1 \cdots w_n]QP$ より $R=QP$

(3) $PQ:\{v_i\}\mapsto\{v_i\}$ なので (1) より $PQ=E$ //

命題1.25 $P:\{u_i\}\mapsto\{v_i\}$ とする.

x の $\{v_i\}$ に関する成分表示を $\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ とすると.

x の $\{u_i\}$ に関する成分表示は $P\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ である

$\because$ $x=[v_1\cdots v_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=[u_1\cdots u_n]P\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ よりわかる //

例3, 問4, 5.

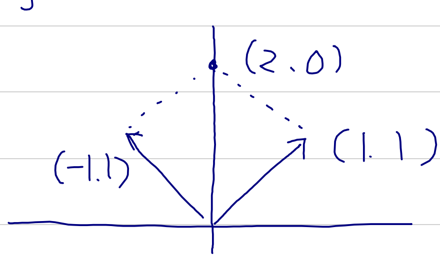
注. $\mathbb{C}^3$ において. $\mathbb{C}^3=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ とするとき. これは.基本ベクトルのなす基底

に関する成分表示になっている.実際.

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\underbrace{[e_1\ e_2\ e_3]}_{=E}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$ である

また例えば.基底 $\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}}_{v_2}$ で $\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$ を表すと.

$\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}=v_1+v_2=[v_1\ v_2]\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ とかける.これを図でかくと



となっている.

基底をかえることは.座標軸をかえることである