§1.4 基底と次元

定義 1.13 $v_1, \cdots, v_n$ が次をみたすとき，Vの基底という

(1) $v_1, \cdots, v_n$ は 1次独立

(2) $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$

(2)をみたすとき，$v_1, \cdots, v_n$ は Vの生成系であるという.

例題 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$(1)，問題 $\boxed{3}$(2)〜(4)

次に，次元の定義をするため，いくつか準備をする

補題 1.14.

$V \ni a_1, \cdots, a_n$ がそれぞれ $V \ni b_1, \cdots, b_m$ の1次結合で表されているとする。このとき，$n > m$ ならば，$a_1, \cdots, a_n$ は1次従属である.

∵ 仮定より.

$$a_1 = c_{11} b_1 + c_{21} b_2 + \cdots + c_{m1} b_m$$

$$a_2 = c_{12} b_1 + c_{22} b_2 + \cdots + c_{m2} b_m$$

$$\vdots$$

$$a_n = c_{1n} b_1 + c_{2n} b_2 + \cdots + c_{mn} b_m$$

とできるが，これを行列で

$$[a_1\ a_2 \cdots a_n] = [b_1\ b_2 \cdots b_m] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} =: C$$ と表せる。

これらはVのベクトル

ここで $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対し、$Cx = 0$ を考えると、$m < n$ より

これは自明でない解をもつ。今それを $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ とすると、

$[a_1\ a_2 \cdots a_n]y = [b_1\ b_2 \cdots b_m]Cy = 0$ となる

一方 $[a_1 \cdots a_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$ より、$\sum y_i a_i = 0$.

y は自明でないので、$a_1, \cdots, a_n$ は1次従属 //

定理1.15 $\{v_1, \cdots, v_n\}$, $\{u_1, \cdots, u_m\}$ が V の基底なら、$n = m$.

(∵) $u_1, \cdots, u_m$ は V の生成系なので、$v_1, \cdots, v_n$ は $u_1, \cdots, u_m$ の

1次結合で表せる。∴ もし $n > m$ なら、補題1.14から、

$v_1, \cdots, v_n$ は1次従属になるが、これは矛盾。∴ $n \leq m$.

同様に、$n \geq m$ もわかる　∴ $n = m$ //

定義 1.16. Vの基底の個数をVの次元といい, $\dim V$で表す.

また $\dim\{0\}=0$ とする. 次元は無限次元のときもある.

例. $\mathbb{C}^n$は $e_1,\cdots,e_n$が基底なので. $\dim\mathbb{C}^n=n$ である.

例題 4(1), 問題 4(2)〜(4)

命題 1.17. Vが n次元である必要十分条件は.

1次独立なベクトルの最大個数が nであることである.

このとき, 1次独立なn個のベクトルは基底になる.

∵ ① Vが n次元とし, $v_1,\cdots,v_n$を基底とする. ここで $w_1,\cdots,w_{n+1}\in V$

を考えると. 補題 1.14より 1次従属になる.

∴ 1次独立なベクトルの最大個数は n.

② 1次独立なベクトルの最大個数をnとし, $v_1,\cdots,v_n\in V$を

1次独立なベクトルとする. ここで $^\forall w\in V$に対し

$v_1,\cdots,v_n, w$ は 1次従属なので. 命題 1.12(3) より

W は $v_1, \cdots, v_n$ の1次結合でかける．∴ $v_1, \cdots, v_n$ は生成系

∴ 基底になり，$\dim V = n$ となる //

注1．$v_1, \cdots, v_m \in \mathbb{C}^n$，$v_i = \begin{bmatrix} v_{1i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{bmatrix}$ とすると ${}^\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m$ に対し

$$[v_1 \cdots v_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \sum x_i v_i = \sum x_i \begin{bmatrix} v_{1i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum v_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum v_{ni} x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$ となる．

∴ $[v_1 \cdots v_m] = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{bmatrix}$ と表している（同一視している）

注2．問題4の中で，解の自由度を使って連立方程式を解くと，

出てくるベクトルは必ず1次独立になる．

この証明は2章で行う．