行列の対角化

定理3.8. Aを$n\times n$行列.

$\varphi_A(t)=(t-\lambda_1)^{n_1}\cdot(t-\lambda_2)^{n_2}\cdot\cdots\cdot(t-\lambda_k)^{n_k}$とする ただし

$\lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j)$, $n_i\geq 1$, $\sum_{i=1}^{k}n_i=n$とする. このとき次は同値.

(1) Aは対角化可能

(2) n個の1次独立なAの固有ベクトルが存在

(3) $\mathbb{R}^n=V(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_k)$

(4) $\dim V(\lambda_i)=n_i$

(5) $\mathrm{rank}(\lambda_i E-A)=n-n_i$

$\because$ (1)$\Rightarrow$(2) 正則行列 $P=[p_1\ p_2\cdots p_n]$ が存在して.

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}a_1 & & & 0\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\end{bmatrix}$$

とできたとすると. $p_1,\cdots,p_n$は1次独立で (系1.11)

$$AP=P\cdot\begin{bmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{bmatrix}$$

となり.

$$A[p_1 \cdots p_n] = [p_1 \cdots p_n]\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$$

$[Ap_1 \cdots Ap_n] = [a_1p_1 \cdots a_np_n]$ となる. $\therefore Ap_i = a_ip_i$

$\therefore p_1, \cdots, p_n$ は1次独立な固有ベクトルになる.

(2) $\Rightarrow$ (3). $p_1, \cdots, p_n$ を1次独立な固有ベクトルとすると.

$p_1, \cdots, p_n$ は $V(\lambda_1), \cdots, V(\lambda_k)$ のいずれかに含まれる.

また.定理3.6(2)より $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0\}$ $(i \neq j)$ なので、

$\mathbb{C}^n \supset V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k) \supset \langle p_1, \cdots, p_k \rangle = \mathbb{C}^n$ となる

$\therefore V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k) = \mathbb{C}^n$ となる

(3) $\Rightarrow$ (4) $\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k)$ より

$n = \dim V(\lambda_1) + \cdots + \dim V(\lambda_k)$ である. (系1.21)

さらに定理3.7より $\dim V(\lambda_i) \leq n_i$ より

$n = \dim V(\lambda_1) + \cdots + \dim V(\lambda_k) \leq n_1 + \cdots + n_k = n$.

$\therefore \dim V(\lambda_i) = n_i$ となる

(4)$\Leftrightarrow$(5) 定理3.5(3)より $\dim V(\lambda_i) = n - \mathrm{rank}(\lambda_i E - A)$ なので

$$\dim V(\lambda_i) = n_i \Leftrightarrow n - \mathrm{rank}(\lambda_i E - A) = n_i$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(\lambda_i E - A) = n - n_i$$

(4)$\Rightarrow$(1) $V(\lambda_i)$の基底を $p_{i1}, \cdots, p_{in_i}$ とする. ここで.

$P = [p_{11}\ p_{12} \cdots p_{1n_1}\ p_{21} \cdots p_{2n_2}\ p_{31} \cdots p_{kn_k}]$ とすると. これは正則で.
(系1.11)

m番目を p_{ij} とする

$$P^{-1}APe_m = P^{-1}A[p_{11} \cdots p_{kn_k}]e_m = P^{-1}Ap_{ij} = P^{-1}\lambda_i p_{ij}$$

$= \lambda_i e_m$ となる

一方 一般的に $B = [b_1 \cdots b_n]$ に対し. $Be_m = b_m$ なので

$P^{-1}APe_m = \lambda_i e_m$ は, $P^{-1}AP$の m列目が $\lambda_i e_m$ であることを示している.

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & O & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & \\ & O & & & & & \lambda_3 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$ となる //

→ Aを対角化するには.

$V(\lambda_i)$ の基底を並べればよい!

<u>系3.9.</u> Aが相異なるn個の固有値をもてば、Aは対角化可能

∵ 固有値の重複度は全て1になるので、

$\dim V(\lambda_i)=1$ となる ∴ 定理3.8(4)がみたされる. //