# §3 行列の対角化

例 $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$ とする.

$f: \mathbb{C}^2_{\{e_1, e_2\}} \to \mathbb{C}^2_{\{e_1, e_2\}}$ の表現行列は $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ である.

ここで. 基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ に対し.

$$f(u_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3u_1 = [u_1\ u_2]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(u_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = u_2 = [u_1\ u_2]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ より.

$f: \mathbb{C}^2_{\{u_i\}} \to \mathbb{C}^2_{\{u_i\}}$ の表現行列は $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ になる.

今. $\{e_i\}$ から $\{u_i\}$ への基底の変換行列を $P$ とすると.

$$\begin{tikzcd} f: \mathbb{C}^2_{\{u_i\}} \arrow[r, "B"] \arrow[d, "P"'] & \mathbb{C}^2_{\{u_i\}} \arrow[d, "P"] \\ \mathbb{C}^2_{\{e_i\}} \arrow[r, "A"] & \mathbb{C}^2_{\{e_i\}} \end{tikzcd}$$

より $A = PBP^{-1}$

$B = P^{-1}AP$ となる.

**定義 3.1.** $n\times n$ 行列 $B$ に対し、$B$ の $(i,j)$ 成分 $(i\neq j)$ 以外全て $0$ である行列を対角行列という

$n\times n$ 行列 $A$ に対し、対角行列 $B$ と正則行列 $P$ が存在して

$B=P^{-1}AP$ とできるとき、$A$ を対角化可能という。

また、$B=P^{-1}AP$ と表すことを、$A$ の対角化という

→ 対角化には、$f(u)=\lambda u$ となる $\lambda$ と $u$ が重要。

**定義 3.2** $n\times n$ 行列 $A$ に対し、

$Au=\lambda u$ 　($(\lambda E-A)u=0$ ともできる)　$(\lambda\in\mathbb{C},\ u\in\mathbb{C}^n,\ u\neq 0)$

をみたす $\lambda$ を $A$ の固有値、

$u$ を固有値 $\lambda$ に属する $A$ の固有ベクトルという。

また、固有ベクトルと $0$ からなる部分空間

$V(\lambda)=\{u\in\mathbb{C}^n \mid (\lambda E-A)u=0\}$ を

固有値 $\lambda$ に属する固有空間という。

さて. $Au=\lambda u$ となる $\lambda$ と $u$ が存在する条件を考えよう.

$Au=\lambda u \iff (\lambda E-A)u=0$ より.

これをみたす自明でない $u$ が存在する条件は.

$|\lambda E-A|=0$ である (∵連立方程式の性質から).

∴ $\lambda$ が $A$ の固有値 $\iff |\lambda E-A|=0$ である.

定義3.3 $t$ を変数とする関数

$\varphi_A(t)=|tE-A|$ を $A$ の固有多項式. といい.

$\varphi_A(t)=0$ を. $A$ の固有方程式という.

また. $\varphi_A(t)=0$ の解 $\lambda$ の重複度を固有値 $\lambda$ の重複度という.

定理3.4.

$\lambda$ が $A$ の固有値 $\iff \varphi_A(\lambda)=0$ .

また. 固有値は重複度をこめて $n$ 個ある.

注. $n$ 次方程式には. 重複度をこめて. $n$ 個 解がある.

例Ⅲ(1)　問Ⅲ(2)〜(5)

<u>定理3.5</u>. $A$ を $n \times n$ 行列，$P$ は正則行列とすると次が成立.

(1) $\varphi_A(t) = \varphi_{P^{-1}AP}(t)$

(2) $A$ と $P^{-1}AP$ の固有値は重複度もこめて等しい.

(3) $\lambda$ が $A$ の固有値なら.

$$\dim V(\lambda) = n - \mathrm{rank}(\lambda E - A)$$

∵ (1) $\varphi_{P^{-1}AP}(t) = |tE - P^{-1}AP| = |P^{-1}(tE-A)P|$

$$= |P|^{-1} \cdot |tE-A| \cdot |P| = |tE-A| = \varphi_A(t)$$

(2) (1)より明らか.

(3) $\dim V(\lambda) = \dim\{u \in \mathbb{C}^n \mid (\lambda E - A)u = 0\}$

$$= \dim\ker(\lambda E - A) = \dim \mathbb{C}^n - \dim \mathrm{Im}(\lambda E - A)$$

$$= n - \mathrm{rank}(\lambda E - A)$$

//

定理3.6　$A$を$n\times n$行列とすると、次が成立

(1) $A$の異なる固有値に属する固有ベクトルは1次独立

(2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$が$A$の固有値なら　$V(\lambda_1)\cap V(\lambda_2)=\{0\}$

(3) $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$が$A$の異なる固有値なら　$\dim V(\lambda_i)=1$

㊟ (1)　$\lambda_1,\cdots,\lambda_{k+1}$を異なる固有値，$u_1,\cdots,u_{k+1}$をその固有ベクトルとする

$k=1$のとき，$u_1$は1次独立

$u_1,\cdots,u_k$が1次独立と仮定し，$u_1,\cdots,u_{k+1}$が1次独立を示す

$\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i u_i=0$　とする

もし$\alpha_{k+1}\neq 0$とすると

$-\dfrac{\alpha_i}{\alpha_{k+1}}$

$$u_{k+1}=-\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{\alpha_{k+1}}u_i=\sum_{i=1}^{k}\beta_i u_i$$

となるが，これより

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1}u_{k+1}&=\sum\lambda_{k+1}\beta_i u_i\\ &\,\|\\ A\,u_{k+1}&=A\left(\sum\beta_i u_i\right)=\sum\beta_i Au_i=\sum\lambda_i\beta_i u_i\end{aligned}$$

となる

$\therefore\ \sum(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\beta_i u_i=0$　となる

$u_1, \cdots, u_k$ の1次独立性から. $(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\beta_i = 0$ だが,

$\lambda_i \neq \lambda_j \ (i \neq j)$ より $\beta_i = 0$ $\therefore u_{k+1} = 0$ となり矛盾

$\therefore \alpha_{k+1} = 0$.

このとき $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = 0$ より $\alpha_i = 0 \ (\forall i)$ $\therefore$ 1次独立 //

(2) $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) \ni u$ とすると.

$$Au = \lambda_1 u \quad \therefore (\lambda_1 - \lambda_2) u = 0 \quad \therefore u = 0$$
$$\quad\ = \lambda_2 u \qquad \therefore V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{0\}.$$

(3) まず. $\dim V(\lambda_i) \geq 1$ である. さらに.

$$n = \dim \mathbb{C}^n \geq \dim(V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n))$$
$$= \dim V(\lambda_1) + \cdots + \dim V(\lambda_n) \quad となる$$

$\therefore \dim V(\lambda_i) = 1$. //

<u>定理3.7</u>. $\lambda$をAの固有値，kをその重複度とすると.

$\dim V(\lambda) \leq k$ である

(∵) $\dim V(\lambda) > k+1$ とする.

$u_1, \cdots, u_{k+1} \in V(\lambda)$ を1次独立とし．ここに

$u_{k+2}, \cdots, u_n \in \mathbb{C}^n$ を付け足して．$u_1, \cdots, u_n$ が1次独立に
なるようにできる
(定理1.18)

ここで $P = [u_1 \cdots u_n]$ は正則行列で (系1.11(2))

$$\varphi_A(t) \cdot |P| = |tE - A| \cdot |P| = |tP - AP|.$$

$$= \left| [tu_1 \cdots tu_n] - [Au_1 \cdots Au_n] \right|$$

$$= \left| [(tE-A)u_1 \cdots (tE-A)u_n] \right|.$$

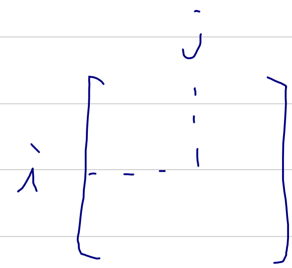
$$= \left| [(t-\lambda)u_1 \cdots (t-\lambda)u_{k+1} \ (tE-A)u_{k+2} \cdots (tE-A)u_n] \right|$$

$$= (t-\lambda)^{k+1} \cdot \left| [u_1 \cdots u_{k+1} \ (tE-A)u_{k+2} \cdots (tE-A)u_n] \right|$$

∴ $\lambda$の重複度は k+1以上となり矛盾 //

注. $A[u_1 \cdots u_n]$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{j1} & u_{n1} \\ u_{12} & u_{j2} & u_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{1n} & u_{jn} & u_{nn} \end{bmatrix}$$




の$(i, j)$成分は $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_{jk}$

一方 $Au_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \\ \vdots \\ u_{jn} \end{bmatrix}$ の第$i$成分は

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_{ik}$$

$\therefore A[u_1 \cdots u_n] = [Au_1 \cdots Au_n]$ //.

別証明 $A[u_1 \cdots u_n] e_i = A[u_1 \cdots u_n] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} < i$

$= Au_i$

一方 $[Au_1 \cdots Au_n] e_i = Au_i$ よりわかる。