解答例

1. $P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$　　$P(B)=\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}+\frac{48}{52}\times\frac{4}{51}=\frac{1}{13}$

$P(B|A)=\frac{1}{13}\times\frac{3}{51}+\frac{12}{13}\times\frac{4}{51}=\frac{1}{13}=P(B)$.

∴ AとBは独立である.

2. ベイズの定理より. 事象A.B.Cをそれぞれ.ひいたクッキーが.

X.Y.Zさんのもの.事象Eをひいたクッキーがわれている.とすると.

$$P(A|E)=\frac{P(E|A)\cdot P(A)}{P(E|A)P(A)+P(E|B)P(B)+P(E|C)P(C)}$$

$$=\frac{0.08\times0.35}{0.08\times0.35+0.05\times0.4+0.03\times0.25}=\frac{56}{111}$$

3 (1) $p_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dy=\int_0^1 x+y\,dy=x+\frac{1}{2}$ $(0\leq x\leq1)$

$p_1(x)=0$　　$(x<0,\ x>1)$

(2) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,p_1(x)\,dx=\int_0^1 x^2+\frac{1}{2}x\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_0^1=\frac{7}{12}$

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p_1(x)\,dx-\left(\frac{7}{12}\right)^2$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^3\right]_0^1-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{5}{12}-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{60-49}{144}=\frac{11}{144}$

(3) $\gamma(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\,p(x,y)\,dx\,dy - E(X)\cdot E(Y)$

$=\int_0^1\int_0^1 x^2y+xy^2\,dx\,dy-\left(\frac{7}{12}\right)^2$

$=\int_0^1 \frac{1}{3}y+\frac{1}{2}y^2\,dy-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{7}{12}\right)^2=\frac{48-49}{144}=\frac{-1}{144}$

$\therefore \rho(X,Y)=\frac{-1}{144}\times\frac{1}{\frac{11}{144}}=-\frac{1}{11}$ である.

なお. $p_1(x)$ と $p_2(y)$ が同じなので. $E(X)=E(Y)$. $V(X)=V(Y)$ を用いた.

4 (1)

X	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	$\cdots$				$\frac{1}{6}$

より.

$E(X)=\frac{1}{6}(1+\cdots+6)=\frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot 7}{2}=\frac{7}{2}$

$V(X)=\frac{1}{6}(1^2+\cdots+6^2)-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 13\cdot 6\cdot 7-\left(\frac{7}{2}\right)^2$

$=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{182-147}{12}=\frac{35}{12}$

$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{12}}$ である.

(2) 420回の平均値を $\bar{X}$ とするとき. $\bar{X}$ はほぼ

$N\left(\frac{7}{2},\frac{35}{12}\cdot\frac{1}{420}\right)=N\left(\frac{7}{2},\frac{1}{12^2}\right)$ に従い.

$Z = \dfrac{\overline{X} - \frac{7}{2}}{\frac{1}{12}} = 12\left(\overline{X} - \frac{7}{2}\right)$ はほぼ $N(0.1)$ に従う。ここで

$P(\overline{X} \geq 3.6) = P\left(Z \geq 12\left(3.6 - \frac{7}{2}\right)\right) = P(Z \geq 1.2)$

$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.5 - 0.3849$

$= 0.1151$ である。(0.12, 0.115 もok)

5. X を100人の平均とすると X はほぼ $N\left(\mu, \frac{25}{100}\right) = N\left(\mu, \frac{1}{2^2}\right)$

に従い、$Z = \dfrac{X - \mu}{\frac{1}{2}} = 2(X - \mu)$ はほぼ $N(0.1)$ に従う。

ここで、$P(X - \delta \leq \mu \leq X + \delta) = 0.95$ となる δ を求めると、

$P(X - \delta \leq \mu \leq X + \delta) = P(\mu - \delta \leq X \leq \mu + \delta)$

$= P(-2\delta \leq Z \leq 2\delta) = 2P(0 \leq Z \leq 2\delta) = 0.95$

$\therefore P(0 \leq Z \leq 2\delta) = 0.475$

$\therefore 2\delta = 1.96 \quad \delta = 0.98 \fallingdotseq 1.0$

$\therefore$ 95%信頼区間は、$169.1 \leq \delta \leq 171.1$ である。

($169.12 \leq \delta \leq 171.08$ もok)

6. p をコイントスで表が出る確率とする.

(1) $H_0 : p = \frac{1}{2}$, (2) $H_1 : p > \frac{1}{2}$

(3) X を100回投げたときの表が出る割合とすると. X はほぼ

$N(p, \frac{1}{100}p(1-p)) = N(\frac{1}{2}, \frac{1}{20^2})$ に従い.

$Z = \dfrac{X - \frac{1}{2}}{\frac{1}{20}} = 20(X - \frac{1}{2})$ は $N(0, 1)$ に従う.

(4) $P(Z > \xi) = 0.05$ となる ξ を求めると、

$P(0 \leq Z \leq \xi) = 0.45$ より $\xi = 1.6449$.

(5) Z の実現値は

$20(X - \frac{1}{2}) = 20(\frac{60}{100} - \frac{1}{2}) = 2$.

(6) Z の実現値は $Z > 1.6449$ に入るので

有意水準5%で H_0 は棄却される