§3.8 フーリエ変換.

f(x)のフーリエ積分を変形すると.

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(u)\cos ux + B(u)\sin ux \, du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(u)\,\frac{e^{iux}+e^{-iux}}{2} + B(u)\,\frac{e^{iux}-e^{-iux}}{2i}\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{A(u)-iB(u)}{2}e^{iux} + \frac{A(u)+iB(u)}{2}e^{-iux}\,du$$ となる

ここで

$$\frac{A(u)-iB(u)}{2} = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos ut\,dt - i\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin ut\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(t)\,(\cos ut - i\sin ut)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{-iut}\,dt$$ となる.同様に

$$\frac{A(u)+iB(u)}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{iut}\,dt$$ である.これらより.

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-iut}dt\,e^{iux} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{iut}dt\,e^{-iux}\,du.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-iut}dt\,e^{iux}du - \int_0^{-\infty} f(t)e^{-iut}dt\,e^{iux}du.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-iut}dt\,e^{iux}du$$ となる.

$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{iut}dt\;e^{-iux}du$ で $v=-u$ で変数変換すると.

$$= \int_0^{-\infty}\int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{-ivt}dt\;e^{ivx}(-dv)$$ となる.

定義. $f(x)$に対し.

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt$$

を$f(x)$のフーリエ変換といい.

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u) e^{iux} du$$

を反転公式という.

例題 3.8.1 ⟶ 問題 3.8.