§3.5 フーリエ積分

$\mathbb{R}$上の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を考える.

ただし. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty$ を仮定しておく.

これをみたすとき. $f(x)$ は 絶対積分可能 という

さて. $f(x)$ を $(-l, l]$ の区間で切り取り. 周期$2l$にした関数を

$f_l(x)$ とする (P119. 図3.9, 3.10 参照) すると. $f_l(x)$ は

$$f(x) = \lim_{l \to \infty} f_l(x)$$

をみたす. $f_l(x)$のフーリエ級数を使えば.

$$f(x) = \lim f_l(x)$$

$$\sim \lim \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$$

$$= \lim \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f_l(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f_l(t) \cos \frac{\pi n t}{l} dt \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f_l(t) \sin \frac{\pi n t}{l} dt \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$$ となる.

ここで. $\lim \left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f_l(x) dx \right| \leq \lim \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = 0$ であり.

また. 区分求積法

$\lim_{l \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} g\left(\frac{n}{l}\right) = \int_0^{\infty} g(u) du$ を使えば. 第2項は

$$\lim_{l \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f_l(t) \cos \pi t \cdot \frac{n}{l} dt \cdot \cos \pi x \cdot \frac{n}{l}$$

$$= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \pi t u \cdot dt \cos \pi x u \, du$$

となる. ここで $\pi u = v$ と変数変換すれば. $du = \frac{1}{\pi} dv$ より

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos tv \, dt \cos xv \, dv$$ となる.

第3項も同様に.

$$(3項) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos tv \, dt \cdot \cos xv \, dv$$ となる. これより

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos tv \, dt \right) \cos xv + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin tv \, dt \right) \sin xv \, dv$$

となる. まとめると. 次になる.

<u>定義</u> $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ のフーリエ積分は

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(u) \cos ux + B(u) \sin ux \, du$$ である. ただし.

$$A(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut \, dt, \quad B(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut \, dt$$ である.

<u>定理3.5.1.</u> $f(x)$ が区分的に滑らかで. 絶対積分可能なら.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(u) \cos ux + B(u) \sin ux \, du$$

$$= \begin{cases} f(x) & (x \text{ は連続点.}) \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & (x \text{ は不連続点.}) \end{cases}$$ が成り立つ

例題 3.5.1 → 問題 3.5