

線形代数学II 平成30年度前期 期末試験問題

注意：解答の順番は問わないが、どの問題を解いているか分かるように書くこと。

- ・解答の書き方により、記載の配点とは別に、最大で5点の加点または減点をすることがある。
- ・解答用紙には2枚とも記名し、2枚目を1枚目に挟んで提出すること。

1. \mathbb{C}^3 において、ベクトル $v = (2, 3, 1)$ が $u = (1, 1, 2)$ と $w = (1, 0, 5)$ によって生成される部分空間に入っているか調べよ。(10点)
2. 次の \mathbb{C}^4 のベクトルの組が1次独立か判定せよ。(10点)

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 2, 3, 4), \quad v_3 = (1, 0, -1, 0)$$

3. \mathbb{C}^3 の基底

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

から、基本ベクトルのなす基底 $\{e_1, e_2, e_3\}$ への基底の変換行列 P を求めよ。(10点)

4. 線形写像 $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\ker f$ の次元を求めよ。(10点)

- (2) 基底 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ。(15点)

5. 次の 4×4 行列 A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ。(5点)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

6. 次の行列 B が、対角化不可能であることを示せ。(10点)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. 次のエルミート行列 C を以下の順序で対角化せよ。(30点)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (1) 行列 C の固有値を求めよ。
- (2) 各固有値に属する固有空間を、 $\langle v, w \rangle$ の形で表せ。
- (3) C を対角化する行列 P と、その逆行列 P^{-1} を求めよ。
- (4) $P^{-1}CP$ を計算せよ。(計算過程は書かなくても良い。)