解答例

1. $v = au + bw$ とすると

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$ より $\begin{cases} a+b=2 \\ a \quad =3 \\ 2a+5b=1 \end{cases}$ となり

$\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$ を得る. $\therefore v = 3u - w$ であり. $\langle u, w \rangle$ に入っている

2. $\mathrm{rank}[v_1\ v_2\ v_3]$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$ $\therefore$ 1次独立である

3. $[e_1\ e_2\ e_3] = [v_1\ v_2\ v_3]P$ より

$P = [v_1\ v_2\ v_3]^{-1}$ である. ここで

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \therefore P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4(1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ を解く。ここで

$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{13}{3} & -3 \end{bmatrix} = 2$ より

解の自由度は1. 今 $z = 13t$ とすれば. $y = 9t$ $x = -19t$

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19t \\ 9t \\ 13t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -19 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}$ より $\ker f = \left\langle \begin{bmatrix} -19 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$\therefore \ker f$ の基底は $\begin{bmatrix} -19 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}$ で $\dim \ker f = 1$.

(2) $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

とすると $\begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = -\frac{7}{2} \end{cases}$ より $f(v_1) = [u_1, u_2] \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$.

$f(v_2) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすると.

$\begin{cases} a = 6 \\ b = -2 \end{cases}$ より $f(v_2) = [u_1, u_2]\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$f(v_3) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすると

$\begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$ より $f(v_3) = [u_1, u_2]\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ 表現行列 は $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 6 & 4 \\ -\frac{7}{2} & -2 & -1 \end{bmatrix}$ である

5. $\varphi_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & t-2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & (t-1)^2-1 & 0 & 0 \\ -1 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (t-1)^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & -2 \\ 0 & -2 & t-2 \end{vmatrix} =$

$= ((t-1)^2-1)((t-2)^2-4) = t(t-2)\cdot t(t-4)$

$= t^2(t-2)(t-4)$ である.

6 $\varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ 0 & t-2 & -1 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)^2$

∴ 固有値は 1 と 2.

ここで 固有値 2 について. $(2E-B)u=0$ となる $u=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を求めると

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ の係数行列の rank は 2 より

解の自由度は 1.

∴ $\dim V(2) = 1$ となり. 重複度と一致しないので対角化不可である.

7. (1) $\varphi_C(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -2 & -1 & t-1 \end{vmatrix}$

$= (t-1)^2(t-2) - 2 - 2 - 2(t-1) - 4(t-2)$

$= (t-1)^2(t-2) - 6t + 6 = (t-1)(t^2-3t+2-6)$

$= (t-1)(t^2-3t-4) = (t-1)(t-4)(t+1)$

$\therefore$ 固有値は $1, 4, -1$

(2). 固有値 1 について.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ をとくと

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

より. $x = t$ とすれば. $y = -2t$, $z = t$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ $(t \neq 0)$ が固有ベクトルで

$$V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

固有値4 について.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ をとくと.

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$ より $y = t$ とすれば $z = t$, $x = t$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore V(4) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

固有値 -1 について.

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$ をとくと

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$ より

$x = t$ とすれば $z = -t$, $y = 0$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \therefore V(-1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(3) $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ とすれば. これは直交行列なので.

$P^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ である

(4) $P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ である.