§1.6 内積と正規直交基底

定義1.26 ${}^{\forall}x, y \in V$ に対し、$(x, y) \in \mathbb{C}$ が定まり、次の条件をみたすとき、

(x, y) を x と y の**内積**、$(\cdot, \cdot)$ を V の内積という。

${}^{\forall}x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し

(1) $(x, x) \geq 0$ かつ $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

(3) $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$

(4) $(x, \alpha y) = \alpha (x, y)$

命題1.27 $(\cdot, \cdot)$ が V の内積のとき、${}^{\forall}x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し、

(1) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$

(2) $(\alpha x, y) = \bar{\alpha} (x, y)$ が成り立つ

∵ (1) $(x+y, z) = \overline{(z, x+y)} = \overline{(z, x)} + \overline{(z, y)}$

$$= (x, z) + (y, z)$$

(2) $(\alpha x, y) = \overline{(y, \alpha x)} = \bar{\alpha}\,\overline{(y, x)} = \bar{\alpha} (x, y)$ //

定義1.28 $(\cdot,\cdot)$ が V の内積のとき，$x \in V$ に対し，

$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ を x のノルムという.

また，$(x,y)=0$ のとき，x と y は直交するという

注 $(x,y) \in \mathbb{R}$ のとき，ある $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ が存在して，

$\cos\theta = \dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ とできる．内積は長さと角度の概念を一般化したもの

例1 $\mathbb{C}^n \ni x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ に対し，

$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$ とすると，これは内積になる．これを標準内積という

→ 特に，$x, y \in \mathbb{R}^n$ なら高校で習った内積

例2 $[0, 2\pi]$ 上の連続関数 f, g に対し，

$(f,g) = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$ で内積を定義できる.

∵ (1) $(f,f) = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} \cdot f(x)\, dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \geq 0$.

また，$(f,f)=0$ なら $f=0$ となる

(2) $\overline{(g, f)} = \overline{\int_0^{2\pi} \overline{g(x)} f(x)\,dx} = \int_0^{2\pi} g(x) \cdot \overline{f(x)}\,dx = (f, g)$

(3) $(f, g+h) = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} (g(x)+h(x))\,dx$

$= \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x)\,dx + \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\, h(x)\,dx = (f, g) + (f, h)$

(4) $(f, \alpha g) = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} \cdot \alpha g(x)\,dx = \alpha \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x)\,dx = \alpha (f, g)$ //.

→ 関数にも長さや角度を定義できる

定義 1.29 $x_1, \cdots, x_n \in V$ $(x_i \neq 0)$ が

$(x_i, x_j) = 0$ $(i \neq j)$ をみたすとき、$x_1, \cdots, x_n$ を直交系という.

さらに $\|x_i\| = 1$ $(^\forall i)$ のとき、正規直交系という

さらに $x_1, \cdots, x_n$ が基底のとき 正規直交基底 という.

定理 (参考) $x_1, \cdots, x_n \in V$ が正規直交基底のとき、$^\forall x \in V$ は.

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x_i, x) x_i$$ とできる.

この式は $n = \infty$ でもある意味で成り立ち,

フーリエ級数とよばれる

命題1.30. 直交系 $x_1, \cdots, x_n \in V$ は1次独立.

∵ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ とすると.

$$0 = (x_1, \sum \alpha_i x_i) = (x_1, \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)$$

$$= \alpha_1 (x_1, x_1) + \cdots + \alpha_n (x_1, x_n) = \sum \alpha_i (x_1, x_i)$$

$= \alpha_1 (x_1, x_1)$. $\therefore \alpha_1 = 0$. 同様に. $\alpha_i = 0$ ($\forall i$) となる//

注. $(x, 0) = (x, 0 \cdot 0) = 0 \cdot (x, 0) = 0$ である.

命題1.31. $x_1, \cdots, x_n \in V$ が1次独立のとき.

正規直交系 $y_1, \cdots, y_n$ で, $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle = \langle y_1, \cdots, y_n \rangle$ となるものが作れる.

∵ $y_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ とすれば.

$$(y_1, y_1) = \left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \frac{x_1}{\|x_1\|} \right) = \frac{1}{\|x_1\|^2} (x_1, x_1) = 1$$ となる.

注. このように. ベクトルをその長さで割ると長さ1(単位ベクトル)になる

この方法を正規化という.

ここで $\langle x_1 \rangle = \langle y_1 \rangle$ である

次に $y_2' = x_2 - (y_1, x_2) y_1$ とおくと.

x_1, x_2 が1次独立より $y_2' \neq 0$ である

(∵) もし $y_2' = 0$ なら $0 = 1 \cdot x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{\|x_1\|} x_1$ より矛盾. //

ここで $y_2 = \frac{y_2'}{\|y_2'\|}$ とすれば. $\|y_2\| = 1$ であり.

$$(y_1, y_2) = \left(y_1, \frac{1}{\|y_2'\|}(x_2 - (y_1, x_2) y_1\right)$$

$$= \frac{1}{\|y_2'\|}\Big((y_1, x_2) - (y_1, x_2)(y_1, y_1)\Big) = 0$$ となる.

また. $y_1, y_2 \in \langle x_1, x_2 \rangle$ と $\dim\langle x_1, x_2 \rangle = \dim\langle y_1, y_2 \rangle = 2$ より.

$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle$ がわかる.

以下. $y_k' = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (y_i, x_k) y_i$

$y_k = \frac{1}{\|y_k'\|} y_k'$ とすればよい //.

この方法を グラム・シュミットの直交化法 という.

例 $\boxed{6}$(1). 問 $\boxed{6}$(2).(3)