部分空間の次元を考える

定理 1.18. $\dim V = n$, $k < n$ とする.

$v_1, \cdots, v_k$ が1次独立のとき, これに $v_{k+1}, \cdots, v_n \in V$ を付けたして

$v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n$ が基底になるようにとれる.

$\because$ まず, 1つのベクトル v_{k+1} を付けたせることを示す.

$W = \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ とすると. $W \neq V$ である.

($\because$ $W = V$ なら $v_1, \cdots, v_k$ は生成系なので $\dim V = k$ となってしまう)

$\therefore$ $v_{k+1} \in V$ を. $v_{k+1} \notin W$ となるようにとる.

もし. $v_1, \cdots, v_{k+1}$ が1次従属なら. 命題 1.12(3) より.

$v_{k+1} \in \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ となり矛盾. $\therefore$ $v_1, \cdots, v_{k+1}$ は1次独立.

$\therefore$ 1つのベクトルを付け加えられることがわかったので.

ベクトルの個数が n になるまで付け加えればよい //

系1.19 WをVの部分空間とすると次が成立

(1) $\dim W \leq \dim V$

(2) $\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$.

∵ (1) 定理1.18より、Wの基底に適当なベクトルを加えてVの基底にできる

$\therefore \dim W \leq \dim V$

(2) 命題1.17より Wの基底はVの基底にもなる.

$\therefore W = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle = V$ //.

命題1.20 W_1, W_2をVの部分空間とするとき.

$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$

∵ $\{w_1, \cdots, w_k\}$を $W_1 \cap W_2$ の基底とする. つまり $\dim(W_1 \cap W_2) = k$

$W_1 \cap W_2$ は. W_1, W_2 の部分空間なので. 定理1.18より

$\{w_1, \cdots, w_k, u_1, \cdots, u_t\}$が W_1 の基底に.

$\{w_1, \cdots, w_k, v_1, \cdots, v_s\}$が W_2 の基底になるようにとれる

このとき $\dim W_1 = k+t$, $\dim W_2 = k+s$ より

$\dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = k+t+s$ である.

ここで, $\{w_1, \cdots, w_k, u_1, \cdots, u_t, v_1, \cdots, v_s\}$ が W_1+W_2 の基底であること

が示せれば, 等号成立となる.

<u>生成系であること</u>

$\forall x+y \in W_1+W_2$ に対し,

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i + \sum_{i=1}^{t} b_i u_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{k} c_i w_i + \sum_{i=1}^{s} d_i v_i$$ とできるので,

$$x+y = \sum_{i=1}^{k} (a_i + c_i) w_i + \sum_{i=1}^{t} b_i u_i + \sum_{i=1}^{s} d_i v_i$$ となる.

$\therefore$ 生成系である.

<u>1次独立であること</u>

$$\sum_{i=1}^{k} a_i w_i + \sum_{i=1}^{t} b_i u_i + \sum_{i=1}^{s} c_i v_i = 0$$ とすると,

$$W_1 \ni \sum a_i w_i + \sum b_i u_i = -\sum c_i v_i \in W_2$$

より このベクトルを x とすれば $x \in W_1 \cap W_2$ となる。

$\therefore x = \sum_{i=1}^{k} d_i w_i$ とできる。

$\therefore \sum d_i w_i = -\sum c_i v_i$ より $\sum c_i v_i + \sum d_i w_i = 0$.

$\therefore c_i = 0,\ d_j = 0\ (\forall i, j)$ となる $\therefore x = 0$.

$\therefore \sum a_i w_i + \sum b_i u_i = 0$ となり $a_i = 0, b_j = 0\ (\forall i, j)$

となる ∴ 1次独立 //

<u>系1.21</u>. W_1, W_2 が V の部分空間, $V = W_1 + W_2$ とすると.

$V = W_1 \oplus W_2$ となる必要十分条件は $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$ である

$\because$ $V = W_1 \oplus W_2 \iff W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$\iff \dim(W_1 \cap W_2) = 0$

$\iff \dim V = \dim W_1 + \dim W_2$. //

問題5.6