§1.2 部分空間

<u>定義1.3</u>. Vの空でない部分集合Wが次の(1),(2)をみたすとき,

WをVの(線形)部分空間という.

$^\forall x, y \in W$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し.

(1) $x + y \in W$　　　(2) $\alpha x \in W$.

<u>命題1.4</u>. Vの零ベクトル$\mathbb{O}$は. Wに入っている.

$\because$ $x \in W$ に対し. $\mathbb{O} = 0 \cdot x \in W$ //

<u>例</u>(1) $\mathbb{C}^n$の部分空間Wを

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, x_1, \cdots, x_{n-1} \in \mathbb{C} \right\}$$ とすると, Wは$\mathbb{C}^n$の部分空間になる.

このWを$\mathbb{C}^{n-1}$とかくこともある(Wと$\mathbb{C}^{n-1}$を同一視している)

(2) $W = \{\mathbb{O}\}$ は Vの部分空間.

<u>定義1.5</u>. $v_1, \cdots, v_n \in V$ と. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$で作られるベクトル

$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ を

$v_1, \cdots, v_n$ の1次結合という. また. これら1次結合全体

$\langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \;\middle|\; \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C} \right\}$ を

$v_1, \cdots, v_n$ で生成される(張られる)部分空間という

例(3) この $\langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ は V の部分空間である

∵ $\forall \sum \alpha_i v_i, \sum \beta_i v_i \in \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$, $\gamma \in \mathbb{C}$ に対し.

$\sum \alpha_i v_i + \sum \beta_i v_i = \sum (\alpha_i + \beta_i) v_i \in \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$

$\gamma \cdot \sum \alpha_i v_i = \sum (\gamma \alpha_i) v_i \in \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ //

例題 $\boxed{10}$, 問 $\boxed{11}$ ~ $\boxed{13}$

例(4) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; 2x - y + 3z = 0 \right\}$ は $\mathbb{C}^3$ の部分空間.

∵ 条件式 $2x - y + 3z = 0$ を方程式だと思って解くと.

係数行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ は $\mathrm{rank} A = 1$ なので.

解の自由度は $3 - 1 = 2$ となる.

∴ $x = \alpha$, $s = \beta$ とおけば. $y = 2x + 3z = 2\alpha + 3\beta$.

$\therefore$ 解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha+3\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる。

$\therefore$ $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となるので部分空間になる //

問 15 〜 18

命題 1.6 W_1, W_2 を V の部分空間とすると

$W_1 \cap W_2 = \{ x \in V \mid x \in W_1, x \in W_2 \}$ も部分空間になる.

$\because$ $\mathbb{0} \in W_1$, $\mathbb{0} \in W_2$ より $\mathbb{0} \in W_1 \cap W_2$.

また $\forall x, y \in W_1 \cap W_2$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し.

$x \in W_1$, $y \in W_1$ より $x + y \in W_1$ かつ $\alpha x \in W_1$

$x \in W_2$, $y \in W_2$ より $x + y \in W_2$ かつ $\alpha x \in W_2$

$\therefore$ $x + y, \alpha x \in W_1 \cap W_2$

$\therefore$ $W_1 \cap W_2$ は部分空間である. //

定義 1.7 W_1, W_2 を V の部分空間とするとき.

$W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$ は

V の部分空間となる. これを W_1 と W_2 の和空間という.

とくに $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ のとき, これを直和といい, $W_1 \oplus W_2$ とかく.

例題 $\boxed{19}$, 問 $\boxed{20}$, $\boxed{21}$