§3.2. エルミート行列の対角化

命題 3.10 エルミート行列の固有値は全て実数.

∵ $Au = \lambda u$ とすると.

$$(Au, u) = (\lambda u, u) = \lambda (u, u)$$
$$\parallel$$
$$(u, Au) = (u, \lambda u) = \bar{\lambda}(u, u) \qquad \therefore \lambda = \bar{\lambda} \quad //$$

命題 3.11

エルミート行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する.

∵ $Au = \lambda u$, $Av = \mu v$ $(\lambda \neq \mu)$ とすると.

$$\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (Au, v) = (u, Av)$$
$$= (u, \mu v) = \mu(u, v)$$

↑ 実数なので

$\lambda \neq \mu$ より $(u, v) = 0$ //

定理 3.12 エルミート行列（対称行列）は.

ユニタリ行列（直交行列）で対角化できる.

補題 3.13 A, B を $n\times n$ 行列とし、

$A=[a_1 \cdots a_n]$, $B=[b_1 \cdots b_n]$ と表されるとすると、

$$A^*B=\begin{bmatrix} \overline{(a_1,b_1)} & \cdots & \overline{(a_1,b_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{(a_n,b_1)} & \cdots & \overline{(a_n,b_n)} \end{bmatrix}$$ である。

$\because$ $$A^*B=\begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1i}} & \cdots & \overline{a_{ni}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$ よりこの (i,j) 成分は、

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{a_{ki}}\,b_{kj}=\overline{(a_i,b_j)}$$ となっている //

定理 3.14 の証明

n についての帰納法でやる。

$n=1$ のとき、1×1 エルミート行列 A は $A=[a]$ と表せる。

$\therefore$ $P=[1]$ とすれば、直交行列で $P^{-1}AP=[a]$ となる

次に $n-1$ まで成り立つと仮定し、n のときを考える

λ_1 をAの固有値. p_1 を $\|p_1\|=1$ をみたす λ_1 の固有ベクトルとする.

グラム・シュミットの直交化法から. $p_1,\cdots,p_n$ が正規直交基底になるように

$p_2,\cdots,p_n$ がとれる.

ここで $P=[p_1 \cdots p_n]$ とすると. これはユニタリ行列 (定理2.10)

$\therefore P^*=P^{-1}$ が成り立つ

今. $(p_i, Ap_1) = (p_i, \lambda p_1) = \overline{\lambda}_1 (p_i, p_1) = \begin{cases} \lambda_1 & (i=1) \\ 0 & (i\neq 1) \end{cases}$ より

$$P^{-1}AP = P^*[Ap_1 \cdots Ap_n]$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{(p_1, Ap_1)} & \cdots & \overline{(p_1, Ap_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (p_n, Ap_1) & \cdots & \overline{(p_n, Ap_n)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \overline{(p_1, Ap_2)} & \cdots & \overline{(p_1, Ap_n)} \\ 0 & \overline{(p_2, Ap_2)} & \cdots & \overline{(p_2, Ap_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \overline{(p_n, Ap_2)} & \cdots & \overline{(p_n, Ap_n)} \end{bmatrix}$$

Bとする

となるが.

$\overline{(p_i, Ap_j)} = (Ap_j, p_i) = (p_j, Ap_i)$ より Bはエルミート

また $(p_1, Ap_i)=0 \quad (i \geq 2)$

∴帰納法の仮定からBはユニタリ行列Qで対角化できる.

さらに $R = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline 0 & Q \end{array}\right]$ とすれば.

$$R^*P^*APR = R^*\left[\begin{array}{c:c} \lambda_1 & 0 \\ \hdashline 0 & B \end{array}\right]R = \left[\begin{array}{c:c} \lambda_1 & 0 \\ \hdashline 0 & R^*BR \end{array}\right]$$

と対角化できる //