§2.3 直交変換と対称変換

定義2.8 $n\times n$ 実行列 A は、

${}^tAA = E_n$ をみたすとき直交行列、

$A = {}^tA$ をみたすとき対称行列 という。

また、$n\times n$ 行列 A に対し、$A^* = {}^t\bar{A}$ とするとき、

$A^*A = E_n$ をみたすとき ユニタリ行列

$A = A^*$ をみたすとき エルミート行列 という。

補題2.9 $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(Ax, y) = (x, A^*y)$$ である

(∵)

$$(Ax, y) = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) =$$

$= y_1\overline{a_{11}x_1} + \cdots + y_1\overline{a_{1n}x_n} = \sum_{i,j} y_i \overline{a_{ij}x_j}$ である.
$+ \quad \vdots$
$+ y_n\overline{a_{n1}x_1} + \cdots + y_n\overline{a_{nn}x_n}$

同様に $(x, A^*y) = \overline{(A^*y, x)} = \overline{\sum_{i,j} x_i \overline{(A^*)_{ij} y_j}}$
$= \sum \overline{x_i} (A^*)_{ij} y_j = \sum \overline{x_i}\, \overline{a_{ji}}\, y_j$ より.

$(Ax, y) = (x, A^*y)$ が成立 //

<u>定理2.10</u> 次は同値

(1) A はユニタリ行列

(2) ${}^\forall x \in \mathbb{C}^n$ に対し $\|Ax\| = \|x\|$

(3) ${}^\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ に対し, $(Ax, Ay) = (x, y)$

(4) $A = [a_1 \cdots a_n]$ と表すと. $a_1, \cdots, a_n$ は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底

∵ (1) ⇒ (2)

$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (x, A^*Ax) = (x, x) = \|x\|^2$.

$(2) \Rightarrow (3)$.

$$(x+y, x+y) = (x, x+y) + (y, x+y) \quad \overline{(x,y)}$$

$$= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y)$$

$$= (x,x) + 2\mathrm{Re}(x,y) + (y,y)$$

$$(A(x+y), A(x+y)) = (Ax, Ax) + 2\mathrm{Re}(Ax, Ay) + (Ay, Ay).$$

$\therefore \mathrm{Re}(x,y) = \mathrm{Re}(Ax, Ay)$ さらに.

$$\mathrm{Im}(x,y) = \mathrm{Re}\, {-i}(x,y) = \mathrm{Re}(x, -iy) = \mathrm{Re}(Ax, -iAy)$$

$$= \mathrm{Re}\, {-i}(Ax, Ay) = \mathrm{Im}(Ax, Ay).$$

$(3) \Rightarrow (4)$.

$$Ae_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ < i \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} = a_i. \quad - \star$$

ここで $(a_i, a_j) = (Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j)$

$$= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$ よりわかる //

$(4) \Rightarrow (1)$.

$$A^*A = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & & \\ \overline{a_{1j}} & \cdots & \overline{a_{nj}} \\ \vdots & & \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

より. この (j, i) 成分は.

$$\overline{a_{1j}}\, a_{1i} + \cdots + \overline{a_{nj}}\, a_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{kj}} \cdot a_{ki} = (a_j, a_i)$$

$$= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \therefore A^*A = E_n$$

//.

<u>定理 2.11</u> 次は同値.

(1) A はエルミート

(2) $^\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ に対し. $(Ax, y) = (x, Ay)$.

$\because$ $(1) \Rightarrow (2)$.

$$(Ax, y) \overset{\text{補題 2.9}}{=} (x, A^*y) = (x, Ay).$$

$(2) \Rightarrow (1)$

$$(Ae_i, e_j) \overset{☆}{=} (a_i, e_j) = a_{ji} \quad (\dagger)$$

である 一方.

一方, $(e_i, Ae_j) = \overline{(Ae_j, e_i)} = \overline{a_{ij}}$.

(†).

$\therefore a_{ji} = \overline{a_{ij}} \quad \therefore A^* = A$ //.

定義 2.12. $f: V \to V$ とする.

(1) $\forall x, y \in V$ に対し. $(f(x), f(y)) = (x, y)$ をみたすfを

ユニタリ変換 という.

(2) $(f(x), y) = (x, f(y))$ をみたすとき, fを 対称変換 という.

例 図(1). 問 図(2).(3) 图