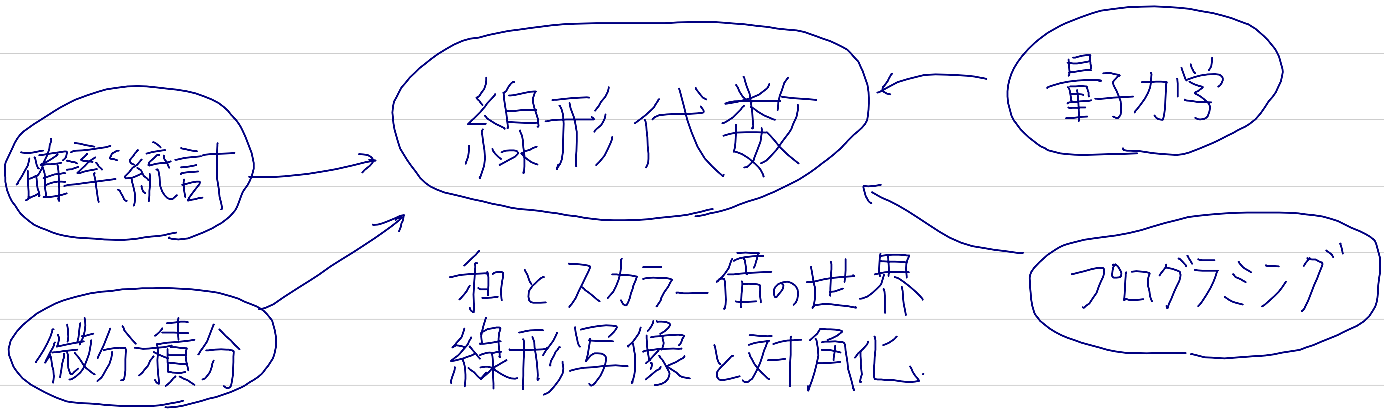
§1 線形空間



定義 1.1. 空でない集合 V に、次の (I), (II) をみたす和と、スカラー倍（定数倍）が与えられているとき、V を線形空間、ベクトル空間といい、V の元をベクトルという。また、x が V の元であることを、$x \in V$ と表す。

(I) $^{\forall} x, y, z \in V$ に対し次が成り立つ

"任意の" という記号。これで V の元を選ばずに3つもってくる。という意味になる。"全ての" ともいいかえられる。

(1) $x + y = y + x$　　(2) $(x+y)+z = x+(y+z)$

(3) ベクトル $\mathbb{0} \in V$ で $^{\forall} x \in V$ に対し

$x + \mathbb{0} = x$ となるものが存在する。

このベクトル $\mathbb{O}$（単に 0 とも書く）を零ベクトルという。

(4) $\forall x \in V$ に対し、

$x + (-x) = \mathbb{O}$ となるベクトル $-x \in V$ が存在する

これを x の逆ベクトルという。

(II) $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し、次が成り立つ。

(1) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ (2) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

(3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (4) $1 \cdot x = x$.

注1）(I), (II) の条件は普通に計算してよいことを表している

注2）スカラーとして $\mathbb{R}$ を使うときは実線形空間

$\mathbb{C}$ を使うときは複素線形空間という。

この講義では $\mathbb{C}$ を使い、複素は省略して書かないこととする。

以下、V は線形空間とする

例(1) n項ベクトルの集合

①の形のもので、②の条件をみたすものを全て集めた集合

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C} \right\}$$ は

ベクトルや行列のかっことして [ ] を使うが、( ) でもかまわない。

ベクトルの和とスカラー倍により線形空間になる。

このとき、$\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ が零ベクトルで $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ の逆ベクトルは $-x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$

である。

(I) (い)だけ示してみると、$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + x_1 \\ \vdots \\ y_n + x_n \end{bmatrix} = y + x$$ より成立。

他の性質は省略

(2). (m.n)行列全体

$$M(m, n; \mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{C}, 1 \leq i.j \leq n \right\}$$ は

行列の和とスカラー倍により線形空間になる.

このとき. 零ベクトルは $\mathbb{0}=\begin{bmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0\end{bmatrix}$ であり.

$A=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$ の逆ベクトルは, $-A=\begin{bmatrix}-a_{11}&\cdots&-a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{n1}&\cdots&-a_{nn}\end{bmatrix}$ である.

(3) $\mathbb{C}$ を係数にもつ多項式全体

$\mathbb{C}[x]=\left\{a_0+a_1x+\cdots a_nx^n \,\middle|\, a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\}$ は.

多項式の和とスカラー倍により線形空間になる.

<u>命題 1.2</u>. V に対し. 以下が成り立つ.

(1) $\mathbb{0}$ ベクトルはただ1つ.

(2) $x\in V$ の逆ベクトルはただ1つ.

(3). $\forall x, y\in V$ に対し. $x=y+z$ となる $z\in V$ がただ1つ存在する.

(4) $0\cdot x=\mathbb{0}$, $\alpha\cdot\mathbb{0}=\mathbb{0}$, $(-1)\cdot x=-x$.

∵ (1) のみ示す. $\mathbb{0}$ と $\mathbb{0}'$ を V の零ベクトルとすると

$\mathbb{0}=\mathbb{0}+\mathbb{0}'=\mathbb{0}'$ ∴ 零ベクトルは1つだけ.

問. 3～8, 11, 12 を解け.

注) 解答は別に作製してあるので参考にすること.