確率・統計 解答例

1. $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$$P(A \cap B) = \frac{12}{52} \times \frac{4}{51} + \frac{1}{52} \times \frac{3}{51} = \frac{1}{52}$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = P(A)$$

∴ AとBは独立.

2. サッカーチームが勝つ事象をE.

1点差以内になる事象をAとすると

$$P(A|E) = \frac{P(E|A) \cdot P(A)}{P(E|A)P(A) + P(E|A^c)P(A^c)}$$

$$= \frac{0.7 \cdot 0.6}{0.7 \cdot 0.6 + 0.5 \times 0.4} = \frac{42}{42+20} = \frac{21}{31}$$

である.

3(1) 周辺確率分布は右のようになる

Y \ X	-2	0	4	
-2	4	1	1	6
0	1	4	1	6
4	1	1	6	8
	6	6	8	

$\times \frac{1}{20}$

(2) $E(X) = -2 \cdot \frac{6}{20} + 0 \cdot \frac{6}{20} + 4 \cdot \frac{8}{20} = \frac{-12+32}{20} = 1.$

$V(X) = (-2)^2 \cdot \frac{6}{20} + 0^2 \frac{6}{20} + 4^2 \cdot \frac{8}{20} - 1^2 = \frac{1}{20}(24+128) - 1$

$= \frac{1}{5}(38) - 1 = \frac{33}{5}.$

(3) $E(XY) = (-2)^2 \cdot \frac{4}{20} + -2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{20} + -2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{20} + 4 \cdot 4 \cdot \frac{6}{20}$

$= \frac{1}{20}(16 - 8 - 8 + 4 \cdot 24) = \frac{24}{5}.$

$\therefore \gamma(X, Y) = \frac{24}{5} - E(X) \cdot E(Y)$

ここで X と Y の確率分布が同じなので

$E(X) = E(Y)$, $V(X) = V(Y)$ である

$\therefore \gamma(X, Y) = \frac{19}{5}$. $\rho(X, Y) = \frac{19}{5} \div \frac{33}{5} = \frac{19}{33}$ である.

4. $Z = \frac{X-2}{4}$ は $N(0, 1)$ に従い.

$0.329 = P(X \leq c) = P\left(Z \leq \frac{c-2}{4}\right).$

ここで $\frac{c-2}{4} < 0$ より. $P\left(0 \leq Z < \frac{2-c}{4}\right) = 0.171.$

$\therefore \frac{2-c}{4} = 0.4427$ $\therefore c = 0.2292$

5 X を $B(\frac{1}{2}, 100)$ に従うとすると X は

$E(X) = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$, $V(X) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2})100 = 25$ となる

∴ Y を $N(50, 25)$ に従うとし, $Z = \frac{Y-50}{5}$ とする ここで

$P(X \geq 60) = P(Y \geq 59.5) = P(Z \geq \frac{59.5-50}{5})$

$= P(Z \geq 1.9) = 0.5 - P(0 \leq Z < 1.9)$

$= 0.5 - 0.4713 = 0.0287$ である

6. X を $N(\mu, \frac{25}{100})$ に従うとし $Z = \frac{X-\mu}{\frac{1}{2}} = 2(X-\mu)$

$P(X-\delta \leq \mu \leq X+\delta) = 0.95$ となる δ を求めると.

$P(X-\delta \leq \mu \leq X+\delta) = P(\mu-\delta \leq X \leq \mu+\delta)$

$= P(-2\delta \leq Z \leq 2\delta) = 0.95$

∴ $P(0 \leq Z \leq 2\delta) = 0.475$. Z は $N(0, 1)$ に従うので

$2\delta = 1.96$ ∴ $\delta = 0.98 \fallingdotseq 1.0$

∴ 95% 信頼区間は $169.1 \leq \mu \leq 171.1$ である

7 (1) H_0: 寿命時間 $\mu = 2000$,

(2) H_1: $\mu < 2000$.

(3) Xを100個の平均寿命とすると.

Xは $N\left(2000, \frac{(120)^2}{100}\right) = N(2000, 12^2)$ に従う

$Z = \frac{1}{12}(X - 2000)$ は $N(0,1)$ に従う

(4) $P(Z < \theta(0.01)) = 0.01$ となる $\theta(0.01)$を求めると.

$P(0 < Z < -\theta(0.01)) = 0.49$ より. $\theta(0.01) = -2.3263$である

(5) Zの実現値は. $\frac{1}{12}(1960 - 2000) = -\frac{40}{12} = -\frac{10}{3} \fallingdotseq -3.33$

(6) -3.33は棄却域 $Z < -2.3263$ に入るので.

H_0は有意水準1%で棄却される

∴ 正しいとは認められない.