<u>定理1.7.1.</u> XとYが独立なら次が成り立つ.

(1) $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

(2) $\gamma(X, Y)=0$

(3) $V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$

∵ 離散の場合だけ示す.

(1) $E(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\cdot y_j\cdot p_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i\cdot y_j\cdot p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$

$=\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\cdot p_{i\cdot}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\cdot p_{\cdot j}\right)=E(X)E(Y)$ となる

(2). $\gamma(X, Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$

(3) $V(aX+bY)=a^2V(X)+2ab\gamma(X, Y)+b^2V(Y)=a^2V(X)+b^2V(Y)$ //.

<u>大数の法則.</u>

<u>定理1.7.2.</u> 確率変数 X_i $(i=1,2,\cdots,n)$ が互いに独立で,

すべての i について. $E(X_i)=\mu$, $V(X_i)=\sigma^2$ であるとする

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とおけば.

(1) $E(\overline{X})=\mu$.

(2) $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ となる.

∵ (1) $E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)\right)=\frac{1}{n}E(X_1)+\frac{1}{n}E(X_2)+\cdots+\frac{1}{n}E(X_n)$

$=\frac{1}{n}\times\mu\times n=\mu$.

(2). $V(\overline{X}) = V(\frac{1}{n}X_1 + \cdots + \frac{1}{n}X_n) = V(\frac{1}{n}X_1 + \cdots + \frac{1}{n}X_{n-1}) + \frac{1}{n^2}V(X_n)$

$\cdots = \frac{1}{n^2}V(X_1) + \cdots + \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{1}{n^2}\cdot\sigma^2\cdot n = \frac{\sigma^2}{n}$ である.

定理1.7.3 $E(X)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$ とすると. $k>1$ に対し.

$P(|X-\mu| \geqq k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2}$ が成り立つ.

∵ 連続型だけ示す.

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot p(x)\cdot dx$$

$$= \int_{|x-\mu|\geqq k\sigma} (x-\mu)^2 p(x)\,dx + \int_{|x-\mu|<k\sigma} (x-\mu)^2\cdot p(x)\cdot dx$$

$$\geqq \int_{|x-\mu|\geqq k\sigma} (x-\mu)^2 p(x)\cdot dx \geqq \int_{|x-\mu|\geqq k\sigma} k^2\cdot\sigma^2\cdot p(x)\cdot dx$$

$$= k^2\sigma^2 \int_{|x-\mu|\geqq k\sigma} p(x)\cdot dx = k^2\cdot\sigma^2\cdot P(|x-\mu|\geqq k\sigma)$$

$\therefore$ $P(|x-\mu|\geqq k\sigma) \leqq \frac{1}{k^2}$ となる.

定理1.7.4 X_i を互いに独立, $E(X_i)=\mu$, $V(X_i)=\sigma^2$ とする.

$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}X_i$ とおくと. $\varepsilon>0$ に対し.

$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}-\mu|<\varepsilon) = 1$ となる.

∵ $P(|\overline{X}-\mu|<\varepsilon) = 1 - P(|\overline{X}-\mu|>\varepsilon)$

$$= 1 - P\left(|\overline{X}-\mu| > \frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\geqq 1 - \left(\frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\varepsilon}\right)^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{n\cdot\varepsilon^2} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty).$$

となる

例 $\boxed{9}$, $\boxed{10}$ サイコロ1つの目をXとするとき.

$E(X)=\frac{7}{2}$, $V(X)=\frac{35}{12}$ だったので.

$E(\bar{X})=E(X)=\frac{7}{2}$, $V(\bar{X})=\frac{1}{5}\cdot V(X)=\frac{7}{12}$

$\boxed{10}$ $V(X_n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{35}{12}$ より $\frac{1}{n}\cdot\frac{35}{12}<\frac{1}{2}$ をとくと.

$n>\frac{35}{6}=5.\cdots$ より nは6以上であればよい

問題 $\boxed{11}$, $\boxed{12}$, $\boxed{13}$

$\boxed{11}$ コイン1枚なげたときの表(1) 裏(0) をYとすると.

$E(Y)=\frac{1}{2}$, $V(Y)=\frac{1}{4}$ であったので.

$E(\bar{X})=E(Y)=\frac{1}{2}$, $V(\bar{X})=\frac{1}{5}\cdot V(Y)=\frac{1}{20}$ である.

$\boxed{12}$ $V(X_n)=\frac{1}{n}\cdot V(Y)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{4}\leqq\frac{1}{20}$ より $n\geqq 5$ であればよい

$\boxed{13}$ $E(X_n)=10$, $V(X_n)=\frac{5}{n}$, $\sigma(X_n)=\sqrt{\frac{5}{n}}$ より 定理1.7.3で $n=5$ とすると.

$P(|X_n-10|\geqq 5\cdot\sigma(X_n))\leqq\frac{1}{25}=4\%$. となる

誤差を1以下にすればよいので.

$5\cdot\sigma(X_n)\leqq 1$ をとくと. $5\cdot\sqrt{\frac{5}{n}}\leqq 1$ $n\geqq 125$ であればよい.